第一章 空间几何体

Ⅰ 总体设计

一、课程目标与学习目标

1. 课程目标

几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科．人们通常采用直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等方法认识和探索几何图形及其性质．三维空间是人类生存的现实空间，认识空间图形，培养和发展学生的几何直观能力、运用图形语言进行交流的能力、空间想象能力与一定的推理论证能力是高中阶段数学必修课程的一个基本要求．在本章，学生将从对空间几何体的整体观察入手，认识空间图形；了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法．

2. 学习目标

（1）利用实物模型、计算机软件观察大量空间图形，认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构．

（2）能画出简单空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合）的三视图，能识别上述的三视图所表示的立体模型，会用材料（如纸板）制作模型，并会用斜二测法画出它们的直观图．

（3）通过观察用平行投影与中心投影这两种方法画出的视图与直观图，了解空间图形的不同表示形式．

（4）完成实习作业，如画出某些建筑的视图与直观图（在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求）．

（5）了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式（不要求记忆公式）．

二、本章知识结构框图

三、内容安排说明

柱体、锥体、台体和球体是简单的几何体，复杂的几何体大都是由这些简单的几何体组合而成的．有关柱体、锥体、台体和球体的研究是研究比较复杂的几何体的基础．本章研究空间几何体的结构特征、三视图和直观图、表面积和体积等．运用直观感知、操作确认、度量计算等方法，认识和探索空间几何图形及其性质．

"1.1　空间几何体的结构"先让学生观察大量实物图片，引导学生思考空间几何体的分类方法，然后概括出柱体、锥体、台体和球体的结构特征，再进一步讨论它们组合而成的简单组合体的结构特征．

"1.2　空间几何体的三视图和直观图"目的是使学生学会在平面上表示空间图形，能画出简单空间图形的三视图，通过观察用两种方法（平行投影与中心投影）画出三视图和直观图，了解空间图形的不同表示形式．能识别上述三视图所表示的立体模型，会使用材料（如纸板）制作模型，会用斜二测画法画出简单空间图形的直观图．

"1.3　空间几何体的表面积与体积"目的是使学生了解空间几何体的表面积和体积的计算方法（不要求记忆公式），并能计算简单组合体的表面积与体积．

"实习作业"的目的是通过学生动手实践，增强他们的空间观念，用视图和直观图表示现实世界中的物体．

本章重点是认识空间几何体的结构特征，画出空间几何体的三视图、直观图，培养空间想象能力、几何直观能力、运用图形语言进行交流的能力．由空间图形说出其结构特征，由结构特征想象出空间几何体，进行空间图形与其三视图的相互转化，是达到本章课程目标的重要方法．

本章中的有关概念，主要采用分析具体实例的共同特点，再抽象其本质属性空间图形而得到．教学中应充分使用直观模型，必要时要求学生自己制作模型，引导学生直观感知模型，然后再抽象出有关空间几何体的本质属性，从而形成概念．

本章内容是在义务教育阶段学习的基础上展开的．例如，对于棱柱，在义务教育阶段直观认识正方体、长方体等的基础上，进一步研究了棱柱的结构特征及其体积、表面积．因此，在教材内容安排中，特别注意了与义务教育阶段"空间与图形"相关内容的衔接．

四、课时安排建议

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　空间几何体的结构	2 课时
1.2　空间几何体的三视图和直观图	2 课时
1.3　空间几何体的表面积与体积	2 课时
实习作业	1 课时
小结	1 课时

II　教科书分析

本章引言介绍了几何学的研究对象，指出空间几何体是几何学的重要组成部分，同时还提示了本

章研究问题的基本方法：直观感知、操作确认、度量计算.

引言的教学以激发学生学习兴趣为主. 教学中可以多展示一些具有典型几何结构特征的空间物体，使学生体会我们周围世界存在大量具有典型几何结构特征的空间物体，其中柱、锥、台和球是简单但也是重要的几何体，它们是正确认识简单组合体的基础.

1.1 空间几何体的结构

一、本节知识结构

- 柱、锥、台、球的结构特征
  - 棱柱的结构特征
  - 棱锥的结构特征
  - 圆柱的结构特征
  - 圆锥的结构特征
  - 棱台与圆台的结构特征
  - 球的结构特征
- 简单组合体的结构特征

二、教学重点与难点

重点：让学生感受大量空间实物及模型，概括出柱、锥、台、球的结构特征.

难点：柱、锥、台、球的结构特征的概括.

三、教科书编写意图与教学建议

1. 传统立体几何课程先研究点、直线、平面之间的位置关系，再研究由它们组成的几何体. 本节先展示大量几何体的实物、模型、图片等，让学生感受空间几何体的整体结构，然后再引导学生抽象出空间几何体的结构特征. 之所以这样安排，是因为先从整体上认识空间几何体，再深入到细节（点、直线、平面之间的位置关系）的认识，更符合人的认识规律. 教学中，可以引导学生根据第 2 页“观察”中的任务，结合自己的经验，讨论一下各图片的结构特征，提出适当的分类标准，对图 1.1-1 中的图片进行分类，在比较的过程中形成对柱、锥、台、球结构特征的直观认识.

2. 在本章的教科书中，设置了许多“观察”、“思考”、“探究”等栏目，如“请列举身边具有已学

过的几何结构特征的物体，你能说出组成这些物体的几何结构特征吗？它们是由哪些基本几何体组成的?”“空间几何体的三视图和直观图能够帮助我们从不同侧面、不同角度认识几何体的结构，它们各有哪些特点？二者有何关系?”“如何根据圆柱、圆锥的几何结构特征，求它们的表面积?”等等，同时还要求学生能够用纸板等材料动手制作空间几何体的模型，其意图是引导学生经历从现实的生活空间中抽象出空间图形，以及探索空间图形性质的过程.

由于没有点、直线与平面的有关知识（如平面与平面平行的知识），所以本节的学习不能建立在严格的逻辑推理（包括定义）的基础上．这与以往教材有较大区别，教师在实际教学中要充分注意到这一点．本节教学注意利用实物模型、图片、幻灯、计算机等工具向学生展示更多的具有典型几何结构特征的空间物体，增强学生的直观感受．在此基础上，引导学生概括出它们的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

3．教科书从图 1.1-1 中的“长方体包装盒”特点的叙述出发，引出棱柱的两个本质特征：有两个面互相平行，其余各面中每相邻两个面的公共边互相平行．在此基础上，给出棱柱概念．教学中应注意引导学生在直观感知的基础上，从围成几何体的面的特征上观察，从而得出反映棱柱主要特征的定义.

由于没有“平面与平面平行”的定义，所以，这里要多引导学生观察身边熟悉的具有“平面与平面平行”形象的事物．例如，教室里的屋顶和地面，教室里相对的两个墙面等等，让学生对它们进行描述，以帮助学生形成“平面与平面平行”的直观认识.

由于棱柱的侧面都是平行四边形，因此可以用棱柱底面的边数对棱柱进行分类．这里可以先让学生讨论一下分类的标准，使学生明确用底面多边形的边数分类的理由.

4．与引出棱柱的概念类似，教科书从实物图片出发，概括了棱锥的两个本质特征：有一个面是多边形，其他各面是有一个公共顶点的三角形．教学中应注意提供给学生一些棱锥模型或图片，引导学生观察组成这些几何体的面，形成对棱锥的直观认识，概括出它们的共同本质特征，并导出概念.

由于棱锥的侧面都是三角形，因此可以用底面多边形的边数对棱锥进行分类．与棱柱的分类一样，可以先让学生讨论一下分类的标准，使学生明确用底面多边形的边数分类的道理.

这里可以向学生指出，三棱锥是最简单的空间几何体之一．熟练把握三棱锥的特征，如三棱锥有四个面，每个面都是三角形，每个三角形的顶点都可以作为三棱锥的顶点，每一个面都可以作为底面……，是学习立体几何的重要准备.

5．与棱柱、棱锥不同，教科书通过“由平面图形（矩形、直角三角形）旋转而成”给出了圆柱、圆锥的概念．因此，圆柱、圆锥有一个生成过程，由这个过程就可以给出轴、底面、侧面、母线等概念．正是出于这样的考虑，教科书在第 4 页的“探究”中要求学生模仿圆柱的结构特征，给出圆锥的相关概念．教学中，应当特别强调圆柱、圆锥的生成过程，特别是要强调以怎样的平面图形、绕哪一条轴旋转而成.

除了按照教科书的方法引导学生认识圆柱、圆锥外，还可以引导学生类比棱柱、棱锥来认识圆柱和圆锥，让他们感受到棱柱、圆柱都是柱体，但棱柱的侧面是平面图形（平行四边形），而圆柱的侧面是曲面（由矩形或直角三角形的一边绕旋转轴旋转而成的）．通过这样的联系和对比，可以加深学生对柱体、锥体的认识.

6．教科书把棱台与圆台的结构特征放在一起进行研究，除了它们都具有台体的形象之外，更重要的是它们都是由平行于锥体的底面的平面而截得的，这也是棱台和圆台的定义方法．台体的定义说明了台体与锥体的联系，为我们提供了解决台体问题的一种方法：有关台体的问题常常可以转化为锥体的问题来解决．由定义也可以知道，台体的分类方法与锥体的方法完全一样．因此，教学中可以在认识台体与锥体关系的基础上，引导学生通过自己的探究获得对棱台、圆台结构特征的认识．教科书第

6 页的第一个探究，目的是使学生认识到，以直角梯形垂直于底边的腰所在直线为旋转轴，直角梯形旋转一周形成的几何体也是圆台．解决这个“探究”，可以使学生从另一角度认识圆柱、圆锥、圆台之间的联系．

7．教科书以“半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体叫做球体．”定义了球体．教学中，除了从旋转体的角度认识球的结构特征外，还可以通过类比圆的结构特征，给出球的结构特征及有关概念，如球心、半径、直径等．

本节最后安排“探究”的目的是引导学生用联系的观点看待柱体、锥体和台体：棱台的上底面扩大，使上下底面全等，就是棱柱；棱台的上底面缩为一个点就是棱锥．圆台、圆柱、圆锥也有类似的关系．

8．教科书设置“简单组合体的结构特征”这一内容，主要是为了让学生在分别学习了柱体、锥体、台体和球体的基础上，运用它们的结构特征来描述简单组合体的结构特征．教学中，可以利用学生身边的实物进行说明，特别是要让学生自己举出一些熟悉的简单组合体的实例，并说明其结构特征．

四、教学设计案例

1.1.1　柱、锥、台、球的结构特征

1．棱柱的结构特征

1．教学任务分析

（1）通过观察模型、图片，使学生理解并能归纳出棱柱的结构特征；

（2）通过对棱柱的观察分析，培养学生的观察能力和抽象概括能力；

（3）通过教学活动，逐步培养学生探索问题的精神．

2．教学重点和难点

棱柱结构特征的归纳．

3．教学基本流程

观察实物模型、图片，归纳得出棱柱的结构特征

↓

第一次深化棱柱的结构特征

↓

第二次深化棱柱的结构特征

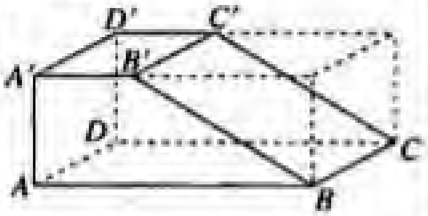
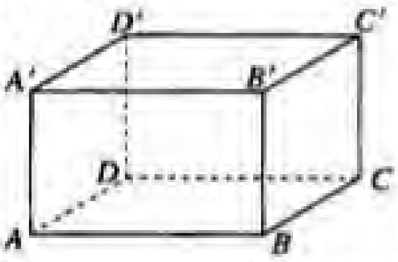
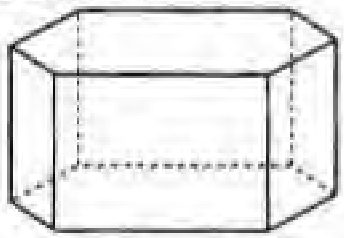
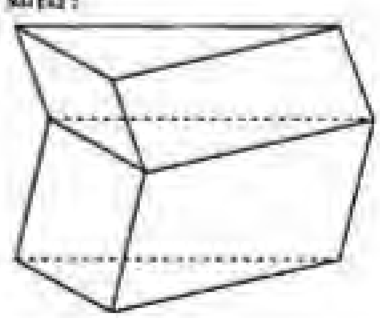
↓

棱柱的分类与表示方法

↓

课堂小结与作业

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 观察教科书第2页中的图(2)、(5)、(7)、(9)，它们各自的特点是什么？它们的共同特点是什么？	从分析具体棱柱的特点出发，通过概括共同特点得出棱柱的结构特征.	在归纳的过程中，可引导学生从围成几何体的面的特征去观察，从而得出棱柱的主要结构特征. 棱柱的本质特征有三个： 1. 有两个面互相平行； 2. 其余各面都是平行四边形； 3. 每相邻两个四边形的公共边互相平行. 引出棱柱概念之前，应注意对具体的棱柱的特点进行充分分析，让学生能够经历共同特点的概括过程.
2. 如图，过 BC 的截面截去长方体的一角，所得的几何体是不是棱柱？ 	通过改变棱柱放置的位置（变式），引导学生应用概念判别几何体.	有的学生可能会认为不是棱柱，因为如果选择上下两平面为底，则不符合棱柱结构特征的第二条. 引导学生讨论：如何判定一个几何体是不是棱柱？ 教学时应当把学生的注意力引导到用概念进行判断上来，即看所给的几何体是否符合棱柱定义的三个条件.
3. 观察长方体，共有多少对平行平面？能作为棱柱底面的有几对？ 	通过变式，深化学生对棱柱结构特征的认识.	教师引导学生分析得出，平行平面共有三对，每一个面都可以作为棱柱的底面.
4. 观察螺杆头部模型，有多少对平行的平面？能作为棱柱底面的有几对？ 	通过变式，加深对棱柱结构特征的认识.	教师引导学生分析得出，平行平面共有四对，但能作为棱柱底面的只有一对，即上下两个平行平面.
5. 有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的几何体是不是棱柱？	通过反例，让学生进行概念辨析，从而全面认识棱柱的概念.	举一反例，如图： 
6. 棱柱的任何两个平行平面都可以作为棱柱的底面吗？	从底面、侧面的定义上进一步理解棱柱的结构特征.	引导学生探究：棱柱的哪些平行的面能作为底面，此时侧面是什么？哪些平行的平面不能作为底面？

续表

问题	设计意图	师生活动
7. 各种各样的棱柱，主要有什么不同？你认为棱柱分类标准是什么？	得到棱柱的分类标准.	在讲棱柱的分类时，要让学生体会，为什么以棱柱底面的边数来对棱柱进行分类.
8. 小结	通过这节课的学习，要了解认识几何体结构特征的一般方法；同时要会结合棱柱的结构特征，判断一个几何体是不是棱柱.	
9. 作业	观察身边的物体，请你举出一些具有棱柱结构特征的物体，并说明为什么它们都是棱柱形物体. 请总结一下讨论棱柱结构特征的方法.	

五、习题解答

练习（第7页）

1. (1) 圆锥；　(2) 长方体；　(3) 圆锥与圆柱的组合体；
   (4) 外壁是六棱柱的侧面，内壁是圆柱的侧面.
2. (1) 五棱柱；　(2) 圆锥.

习题1.1　A组

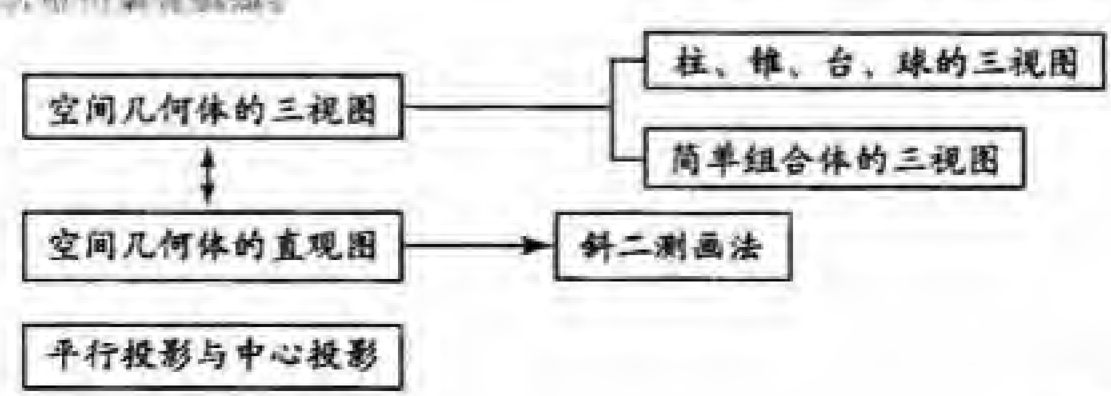
1. (1) 不是台体，因为此几何体的侧棱不相交于一点，不是由棱锥截得的；
   (2) (3) 也不是台体，因为不是由平行于棱锥和圆锥的底面的平面截得的几何体.
2. (1) 六棱柱；　(2) 由圆锥与圆台构成的组合体；
   (3) 由棱锥和四棱柱构成的组合体.
3. 这个几何体是由两个同心的球面围成的几何体.
4. 略.

B组

1. 剩下的几何体是棱柱，截去的几何体也是棱柱；它们分别是五棱柱和三棱柱.
2. 略.

1.2　空间几何体的三视图和直观图

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：画出简单组合体的三视图，用斜二测画法画空间几何体的直观图；

难点：识别三视图所表示的空间几何体.

三、教科书编写意图及教学建议

本节教科书在上一节认识空间几何体结构特征的基础上，学习空间几何体的表示形式，进一步提高对空间几何体结构特征的认识．主要内容是：画出空间几何体的三视图，用斜二测法画法画出空间几何体的直观图；介绍空间图形在平行投影和中心投影下的不同表示形式.

比较准确地画出几何图形，是学好立体几何的一个前提．因此，本节内容是立体几何的基础之一，教学中应当给以充分的重视.

1．画三视图立体几何中的基本技能，同时，通过三视图的学习，可以丰富学生的空间想象力．“视图”是将物体按正投影法向投影面投射时所得到的投影图．光线自物体的前面向后投影所得的投影图称为“正视图”，自左向右投影所得的投影图称为“侧视图”，自上向下投影所得的投影图称为“俯视图”．用这三种视图即可刻划空间物体的几何结构，这种图称之为“三视图”.

教科书从复习初中学过的正方体、长方体……的三视图出发，要求学生自己画出球、长方体的三视图；接着，通过“思考”提出了“由三视图想象几何体”的学习任务．进行几何体与其三视图之间的相互转化，是高中阶段的新任务，这是提高学生空间想象力的需要，应当作为教学的一个重点．另外，还可以引导学生通过回答第 11 页的“思考”，对三视图在认识空间几何体中的作用进行归纳总结.

三视图的教学，主要应当通过学生自己的亲身实践，动手作图来完成．因此，教科书主要通过提出问题，引导学生自己动手作图来展示教学内容．教学中，教师可以充分利用“思考”“探究”栏目中提出的问题，让学生在动手实践的过程中学会三视图的作法，体会三视图的作用．对于简单几何体的组合体，在作三视图之前应当提醒学生细心观察，认识了它的基本结构特征后，再动手作图．第 11 页的“探究”可以作为作业，让学生在课外完成后，再把自己的作品带到课堂上来展示交流.

2．“空间几何体的直观图”只介绍了最常用的、直观性好的斜二测画法．用斜二测画法画直观图，关键是掌握水平放置的平面图形直观图的画法，这是画空间几何体直观图的基础．因此，教科书安排了两个例题（例 1、例 2），用以说明画水平放置的平面图形直观图的方法和步骤．在例 1 的教学中，要引导学生体会画水平放置的多边形的直观图的关键是确定多边形顶点的位置．因为多边形顶点的位置一旦确定，依次连结这些顶点就可画出多边形来，因此平面多边形水平放置时，直观图的画法可以归结为确定点的位置的画法．而在平面上确定点的位置，可以借助于平面直角坐标系，确定了点的坐标就可以确定点的位置．因此，画水平放置的平面直角坐标系应当是学生首先要掌握的方法.

例 2 的教学中，要引导学生与例 1 进行比较．与画水平放置的多边形的直观图一样，画水平放置的圆的直观图，也是要先画出一些有代表性的点．由于不能像多边形那样直接以顶点为代表点，因此需要自己构造出一些点，这就是为什么要将直径 n 等分，并作 y 轴的平行线的理由．显然，n 越大，直径被分得越细，所画出的图形就越直观.

例 3 的教学中，要注意对每一步骤提出严格要求，让学生按部就班地画好每一步，不能敷衍了事.

例 4 是一个综合题，要求学生先由三视图想象出几何体（一个由圆柱和圆锥组合而成的简单组合体），然后再画出相应的直观图．教学时应当注意引导学生正确把握图形尺寸大小之间的关系.

空间几何体的三视图与直观图有密切的联系．为此，教科书在第 16 页提出了一个“探究”，指出

它们能够帮助我们从不同侧面、不同角度对几何体的结构特点进行认识. 教学中应当引导学生对这两种图形的特点及其关系进行讨论. 实际上，三视图从细节上刻画了空间几何体的结构. 根据三视图，我们就可以得到一个精确的空间几何体，正是因为三视图的这个特点，使它在生产活动中得到广泛应用（零件图纸、建筑图纸等都是三视图）. 直观图是对空间几何体的整体刻画，人们可以根据直观图的结构来想象实物的形象.

3. 在平行投影下画空间图形在中心投影下画空间图形，是几何作图的两种基本方法. 教科书在比较详细地介绍平行投影下作空间图形的基础上，采用对比的方法，介绍了这两种方法的各自特点. 教学中，可以使用对比的方法使学生认识到，根据投影条件的不同，投影方法可分为中心投影和平行投影两大类.

中心投影法，即投影线都经过某一投影中心. 如图 1-1 所示，平面 α 上的$\triangle A'B'C'$就是$\triangle ABC$ 在平面 α 上的中心投影.

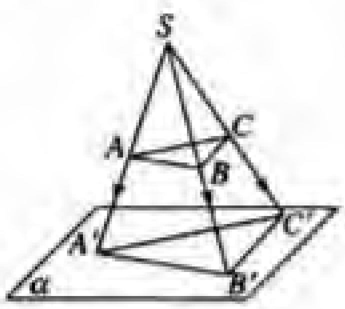


图 1-1

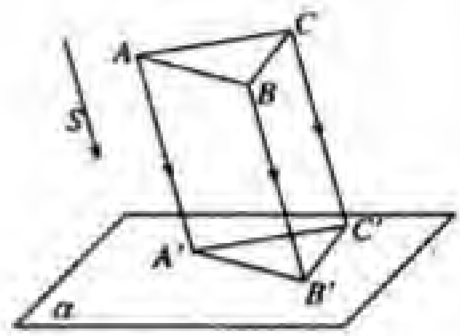


图 1-2

平行投影法，即所有投影线互相平行，或投影中心在无限远处. 如图 1-2，S 表示投影线的方向，平面 α 上的$\triangle A'B'C'$就是$\triangle ABC$ 在平面 α 上的平行投影. 另外，教学中还可以向学生多展示一些图片，让学生辨析它们是平行投影下的图形还是中心投影下的图形.

四、习题解答

练习（第 12 页）

1. （1）略；（2）略；（3）略.

2. （1）六棱锥（图略）；

（2）由两个上底对接的圆台组成的简单组合体（图略）.

练习（第 16 页）

1. 略.

2. （1）√；（2）×；（3）×；（4）√.

3. A.

4. 略.

5. 略.

习题 1.2　A 组

1. 略.

2. （1）三棱柱；（2）圆台.

3. 略.　4. 略.　5. 略.　6. 略.　7. 略.

B 组

1. 主要是由圆柱组成的简单组合体（图略）.

精品教学网www.itvb.net

全力打造全国最新最全的免费视频教学网站，现有内容已经覆盖学前，小学，初中高中，大学，职业等各学段欢迎各位爱学人士前来学习交流。

QQ309000116

2. 略.

3. 略.

1.3 空间几何体的表面积与体积

一、本节知识结构

- 空间几何体的表面积与体积
  - 柱体、锥体、台体的表面积与体积
  - 球的体积与表面积

二、教学重点与难点

重点：了解球、柱体、锥体、台体的表面积和体积的计算公式.

难点：球的体积与表面积的推导.

三、教科书编写意图与教学建议

本节有两个任务，一是根据柱、锥、台的结构特征并结合它们的展开图，推导它们的表面积的计算公式，从度量的角度认识空间几何体；二是用极限思想推导球的体积公式和表面积公式，使学生初步了解利用极限思想解决问题的基本步骤，体会极限思想的基本内涵.

1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积

1. 把由平面围成的几何体沿着若干条棱剪开后，几何体的各面就可展开在一个平面内，得到一个平面多边形，这个平面多边形就叫做这个几何体的表面展开图. 由于剪开的棱不同，同一个几何体的表面展开图可以不是全等形，但是，不论怎样剪法，同一个多面体的表面展开图的面积是一样的.

本节一开始的"思考"从学生熟悉的正方体和长方体的展开图入手，分析展开图与其表面积的关系. 目的有两个：其一，复习表面积的概念，即表面积是各个面的面积的和；其二，介绍求几何体表面积的方法，把它们展成平面图形，利用平面图形求面积的方法，求立体图形的表面积.

接着，教科书安排了一个"探究"，要求学生类比正方体、长方体的表面积，讨论棱柱、棱锥、棱台的表面积问题，并通过例1进一步加深学生的认识. 教学中可以引导学生讨论得出：棱柱的展开图是由平行四边形组成的平面图形，棱锥的展开图是由三角形组成的平面图形，棱台的展开图是由梯形组成的平面图形. 这样，求它们的表面积的问题就可转化为求平行四边形、三角形和梯形的面积问题.

2. 教科书通过"思考"提出"如何根据圆柱、圆锥的几何结构特征，求它们的表面积?"的问题. 教学中可引导学生回忆圆柱、圆锥的形成过程及其几何特征，在此基础上得出圆柱的侧面可以展开成为一个矩形，圆锥的侧面可以展开成为一个扇形的结论. 随后的有关圆台表面积问题的"探究"，也可以按照这样的思路进行教学. 值得注意的是，圆柱、圆锥、圆台都有统一的表面积公式，得出这些公

式的关键是要分析清楚它们的底面半径、母线长与对应的侧面展开图中的边长之间的关系，教学中应当引导学生认真分析．在分别学习了圆柱、圆锥、圆台的表面积公式后，可以引导学生用运动、变化的观点分析它们之间的关系．由于圆柱可看成上下两底面全等的圆台；圆锥可看成上底面半径为零的圆台，因此圆柱、圆锥就可以看成圆台的特例．这样，圆柱、圆锥的表面积公式就可以统一在圆台的表面积公式之下．

3．关于体积的教学．我们知道，几何体占有空间部分的大小，叫做几何体的体积．这里的"大小"没有比较大小的含义，而是要用具体的"数"来定量的表示几何体占据了多大的空间，因此就产生了度量体积的问题．度量体积时应知道：①完全相同的几何体，它们的体积相等；②一个几何体的体积等于它的各部分体积的和．体积相等的两个几何体叫做等积体．相同的两个几何体一定是等积体，但两个等积体不一定相同．体积公式的推导是建立在等体积概念之上的．

柱体和锥体的体积计算，是经常要解决的问题．虽然有关公式学生已有所了解，但进一步了解这些公式的推导，有助于学生理解和掌握这些公式．为此，教科书安排了一个"探究"，要求学生思考一下棱锥与等底等高的棱柱体积之间的关系．教学中，可以引导学生类比圆柱与圆锥之间的体积关系来得出结论，而对学有余力的学生，也可以介绍一下下面的方法．

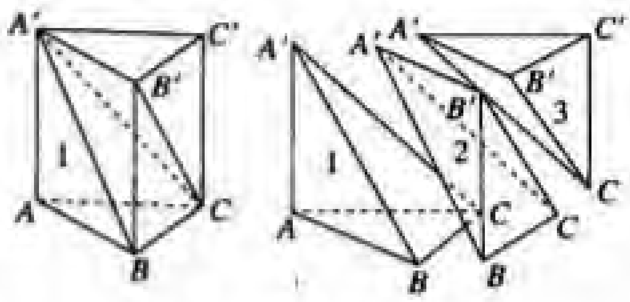


图 1-3

如图 1-3，设三棱柱 $ABC—A'B'C'$ 的底面积（即$\triangle ABC$ 的面积）为 S，高（即点 A'到平面 ABC 的距离）为 h，则它的体积为 Sh．沿平面 $A'BC$ 和平面 $A'B'C$，将这个三棱柱分割为 3 个三棱锥．其中三棱锥 1、2 的底面积相等（$S_{\triangle A'AB}=S_{\triangle A'B'B}$），高也相等（点 C 到平面 $ABB'A'$的距离）；三棱锥 2、3 也有相等的底面积（$S_{\triangle B'BC}=S_{\triangle B'C'C}$）和相等的高（点 A'到平面 $BCC'B'$的距离）．因此，这三个三棱锥的体积相等，每个三棱锥的体积是$\frac{1}{3}Sh$．

三棱锥 $A'—ABC$（即三棱锥 1）如果以$\triangle ABC$ 为底，那么它的底面积是 S，高是 h，而它的体积是$\frac{1}{3}Sh$．这说明三棱锥的体积等于它的底面积乘以高的积的三分之一．

对于一个任意的锥体，设它的底面积为 S，高为 h，那么它的体积应等于一个底面积为 S，高为 h 的三棱锥的体积，即这个锥体的体积 $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$．这就是锥体的体积公式．

4．教科书在给出台体体积的计算公式时，在边空中作了"此公式可以证明"的提示．实际上，根据台体的结构特征，容易得到下面的方法．

如图 1-4，设台体（棱台或圆台）的上、下底面面积分别是 S 和 S'，高是 h．设截得台体时去掉的锥体的高是 x，则截得这个台体的锥体的高是 $h+x$，则

$$V_{台体}=V_{大锥体}-V_{小锥体}=\frac{1}{3}S(h+x)-\frac{1}{3}S'x=\frac{1}{3}[Sh+(S-S')x]，$$

而$\frac{S'}{S}=\frac{x^2}{(h+x)^2}$，

所以$\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}=\frac{x}{h+x}$，$x=\frac{\sqrt{S'}h}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$代入上式，得

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h\left[S+(S-S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right]=\frac{1}{3}h[S+\sqrt{SS'}+S']．$$


图 1-4

5. 与讨论表面积公式之间的关系类似，教科书在得出柱体、锥体、台体的体积公式后，安排了一个“思考”，目的是引导学生思考这些公式之间的关系，建立它们之间的联系. 实际上，这几个公式之间的关系，是由柱体、锥体和台体之间的关系决定的. 这样，在台体的体积公式中，令 $S'=S$，得柱体的体积公式；令 $S'=0$，得锥体的体积公式.

1.3.2 球的体积和表面积

1. 球的体积是对球体所占空间大小的度量，由球的结构特征可知，它是球半径 R 的函数. 本小节介绍了一种推导球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 的方法，即“分割、求近似值、再由近似和转化为球的体积”的方法，体现了极限思想. 在公式的推导过程中，需要较高的想象能力，代数变换过程也有一定的复杂性. 为此，教科书安排了比较详细的讲解过程，还安排了像“$n=1\ 000$ 时，$\frac{1}{n}=\frac{1}{1\ 000}$；$n=10\ 000$ 时，$\frac{1}{n}=\frac{1}{10\ 000}$，…当 n 无限变大时，$\frac{1}{n}$趋向于 0”这样的具体过程，以帮助学生认识“随着 n 增大，$\frac{1}{n}$越来越小”. 教学中，应当按部就班地让学生经历“分割、求近似值、由近似值转化为球的体积”的过程. 球体积公式的推导过程不要求学生掌握.

2. 球的表面积是对球的表面大小的度量，它也是球半径 R 的函数. 由于球面是不可展的曲面，所以不能像推导圆柱、圆锥的表面积公式那样推导球的表面积公式.

教科书采用的推导球的表面积公式的方法，仍然是“分割，求近似和，再由近似和转化球的表面积”的极限思想方法，并且具体表述了三个步骤. 这与推导球体积公式时所用的方法在思想上是一脉相承的，只是在具体分割的做法上有所不同. 推导球体积公式时，是将球分割为许多“小圆片”；推导球的表面积公式时，是将球分割为许多“小锥体”. 同样的，在分割过程中，需要学生有较好的空间想象力，教学中应当引导学生仔细阅读教科书，认真理解其中对分割方法的直观描述. 推导球表面积公式时，要借助已有的球体积公式，实际上体现了“同一物体用两种方法来求体积，所得结果应当相等”的思想，这种思想方法在立体几何中也时常用的. 与球体积的推导一样，教学的重点要放在引导学生了解其所运用的基本思想方法上.

四、习题解答

练习（第 25 页）

1. $\frac{2}{3\pi}\sqrt{3a\pi}$ m.

2. 1.74 千克

3. 2 325 cm^3

练习（第 30 页）

1. 8 倍.

2. $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi a\ cm^3$.

3. 104.

习题 1.3 A 组

1. 780 cm^2.

2. $l=\frac{r^2+R^2}{r+R}$.

3. 解：长方体的三条棱长分别为 a，b，c，则截出的棱锥的体积为 $V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}abc=\frac{1}{6}abc$，剩下的几何体的体积 $V_2=abc-\frac{1}{6}abc=\frac{5}{6}abc$，所以，$V_1:V_2=1:5$.

4. 解：当三棱柱的侧面 AA_1B_1B 水平放置时，液面部分是四棱柱，其高即为原三棱柱的高，侧棱长 $AA_1=8$. 设当底面 ABC 水平放置时，液面高为 h，由已知条件知，四棱柱与三棱柱的底面积之比是 $3:4$. 由两种状态下液体体积相等可得 $3\times8=4\times h$，所以，$h=6$.

5. 解：$S_{棱柱侧}=4\times40\times80=12\ 800(\text{cm}^2)$，

   $S_{台侧}=4\times\frac{1}{2}\times(40+50)\times5\sqrt{3}\approx1\ 530(\text{cm}^2)$.

   所以，需要瓷砖 14 330 cm^2.

6. 解：北京到上海的铁路长度约为 1 340 km，又截面面积为 0.825 m^2. 所以，估计所用碎石为 $1\ 340\times1\ 000\times0.825=1\ 105\ 500(\text{m}^3)$.

B 组

1. 总表面积约为 1 049 cm^2，体积为 1 067 cm^3.
2. 提示：依据三角形任意两边之和大于第三边即可得证.
3. 略.

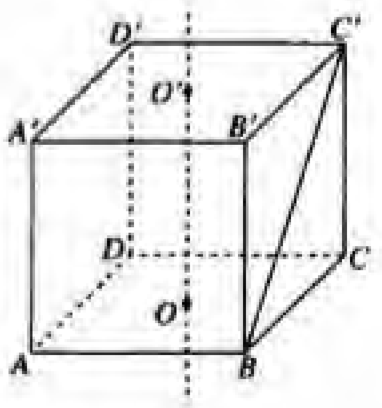
复习参考题　A 组

1. (1) 圆柱；　(2) 三棱锥.
2. 略.
3. 略.
4. 略.
5. 解：设圆柱的母线长为 l，底面外接圆半径为 R，由题意可知，$R=\frac{1}{2}l$，$V=\pi R^2l$，所以，$R^2l=\frac{V}{\pi}$；

   又设正三角形的边长为 a，则 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2}{3}=R$. 所以 $a=\sqrt{3}R$，故 $V_{三棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2l=\frac{\sqrt{3}}{4}\times3R^2l=\frac{3\sqrt{3}V}{4\pi}$.
6. 3 798.
7. 792 克.

B 组

1. (1) 略；
   (2) 表面积约为 3 117cm^2，体积为 12 728 cm^3；
   (3) 略.
2. 水不会从水槽中流出.
3. 如右图所示的正方体，棱长为 1，其中 O，O' 分别为下底面和上底面中心. 如果以 OO' 为轴，转动正方体，则在转动过程中 BC' 留下的轨迹即是纸篓面.



（第 3 题）

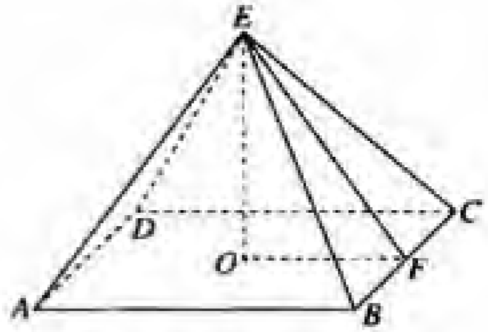
4. 解：如图，设所裁的等腰三角形的底边长为 x cm.

   在 Rt$\triangle EOF$ 中，

   $EF=5$ cm，$OF=\frac{1}{2}x$ cm，

所以 $EO=\sqrt{25-\frac{1}{4}x^2}$，

$V=\frac{1}{3}x^2\sqrt{25-\frac{1}{4}x^2}$　$(0<x<10)$.



（第 4 题）

III 自我检测题

一、选择题.

1. 关于“斜二测”直观图的画法，如下说法不正确的是（　　）

A. 原图形中平行于 x 轴的线段，其对应线段平行于 x' 轴，长度不变

B. 原图形中平行于 y 轴的线段，其对应线段平行于 y' 轴，长度变为原来的 $\frac{1}{2}$；

C. 画与直角坐标系 xOy 对应的 $x'O'y'$ 时，$\angle x'O'y'$ 必须是 $45°$；

D. 在画直观图时，由于选轴的不同，所得的直观图可能不同.

2. 关于“斜二测”直观图的画法，如下说法正确的是（　　）

A. 等腰三角形的直观图仍为等腰三角形

B. 梯形的直观图可能不是梯形

C. 正方形的直观图为平行四边形

D. 正三角形的直观图一定为等腰三角形

3. 棱长都是 1 的三棱锥的表面积为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

4. 两个球的体积之和是 12π，大圆周长之和是 6π，则两球半径之差为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

5. 球与它的内接正方体的表面积之比是（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

6. 等体积的球和正方体，它们的表面积的大小关系是（　　）

A. $S_{球}>S_{正方体}$　　B. $S_{球}=S_{正方体}$　　C. $S_{球}<S_{正方体}$　　D. 不能确定

二、填空题.

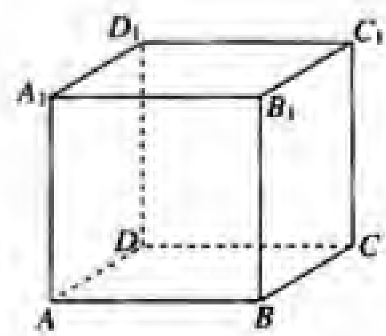
7. 两个球的体积之比为 8∶27，那么这两个球的表面积的比为________.

8. 如图所示的四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，指出

棱柱的底面：__________；

侧面：________________；

侧棱：____________________.



（第 8 题）

9. 如果球的半径扩大为原来的 n 倍，则球的表面积扩大为原来的________倍.

10. 已知某球体的体积与其表面积的数值相等，则此球体的半径为________.

三、解答题.

11. 已知半球内有一个内接正方体，求这个半球的体积与正方体的体积之比.

自我检测题参考答案

一、选择题.

1. C　2. C　3. A　4. A　5. C　6. C

二、填空题.

7. 4∶9.

8. 棱柱的底面 $ABCD$，$A_1B_1C_1D_1$；

侧面 A_1ABB_1，B_1BCC_1，D_1DCC_1，A_1ADD_1；

侧棱 A_1A，B_1B，C_1C，D_1D.

9. n^2.

10. 3.

三、解答题.

11. $\sqrt{6}\pi:2$.

IV 拓展资源

与直观图画法有关的初步知识.

（一）投影的概念和分类

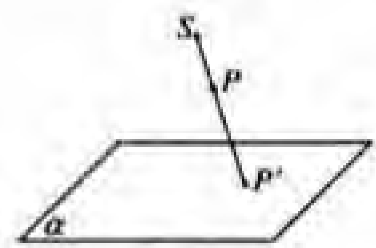


图 1

我们知道，一个人在灯与墙之间，在灯光的照射下，墙上就会出现人影. 像这样，用一束光线照射物体，在平面上产生影像的方法叫做投影法. 如图 1，设光源为 S，平面为 α，点 P 在 S 与 α 之间，那么从 S 射出的光线 SP 与 α 交于 P'. 点 P' 就是 P 在 α 上的投影（射影）. 点 S 叫做投影中心. 平面 α 叫做投影面. 射影 SPP' 叫做投影线.

根据投影条件的不同，投影方法可分为中心投影和平行投影两大类：

1. 中心投影法　投射线都经过某一投影中心的投影法叫做中心投影法. 如图 2 所示，平面 α 上的 $\triangle A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 在平面 α 上的中心投影.

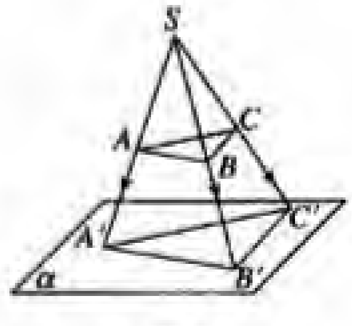


图 2

2. 平行投影法　如果所有的投射线互相平行，或看作投影中心在无限远处，我们把这种投影法叫做平行投影法. 如图 3，S 表示投射线的方向，$\triangle A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 在平面 α 上的平行投影.

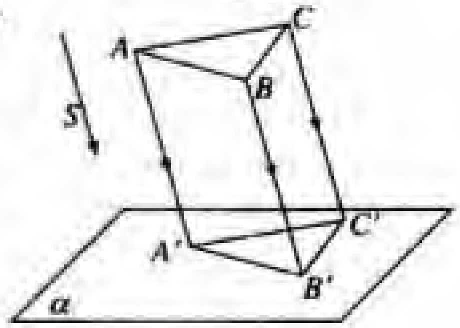


图 3

按投影方向与投影面的相对位置的不同，平行投影又分为正投影和斜投影两种. 投影方向垂直于投影面的叫做正投影法. 与投影面倾斜的叫做斜投影法.

（二）直观图的画法

1. 直观图 按平行投影法，把空间图形在纸上或黑板上画得既富有立体感，又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系（主要是长宽高三个方面的），我们把这

种投影图叫做直观图.

直观图和透视图（中心投影画的）有些相像. 如图 4 是透视图，这种图虽富有立体感，但是平行线段的长短和位置关系有了变化，不易从图中看出线段的长短和它们的位置关系，同时画法也比较复杂，不易掌握. 图 5 直观图，虽然立体感稍差一些，但容易从图上看出线段的长短和它们的相互位置关系，并且画法也比较容易.

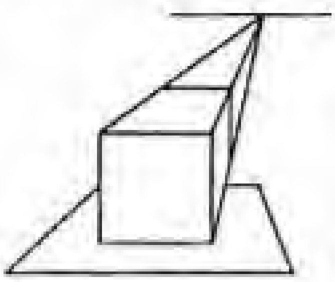


图 4

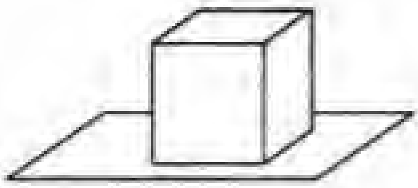


图 5

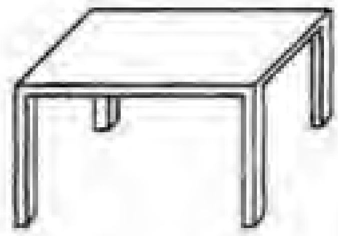


图 6

图 7

直观图也不同于二视图或三视图. 如图 6，是桌子的直观图，一看就知道画的是桌子，直观性较强. 而二视图或三视图画的是从几个方面看到的桌子的情况，如图 7 是从正面看到的桌子的情况（主视图）. 二视图和三视图虽然能更精确的表示出线段的长短和位置关系，但缺乏立体感.

用平行投影法把物体连同直角坐标系一起投影到一个投影面上所得的投影图，叫做轴测投影图（简称轴测图），这种投影画法称为轴测投影法.

轴测投影按投影线与轴测投影面斜交或垂直，可分为斜轴测投影和正轴测投影. 按三轴方向的变形系数的大小关系，又可分为等轴测投影（三轴方向的变形系数都相等）、二轴测投影（有两轴方向的变形系数相等）和三轴测投影（三轴方向的变形系数都不相等）. 事实上，轴测投影的种类很多，但在实际应用中，常用的是斜二轴测投影（即教科书中结合棱柱、棱锥、棱台介绍的直观图的画法）和正等轴测投影.

2. 第一种直观图的画法——斜二轴测投影，简称斜二测. 就是投影线和投影面斜交，有两轴方向的变形系数相等的轴测投影.

3. 第二种直观图的画法——正等轴测投影. 就是投影线和投影面垂直，各轴的变形系数都相等的轴测投影.

4. 斜二测投影与正等测投影的比较

斜二测与正等测各有优点，用斜二测画出的直观图能使一个面（直立于我们面前的那个面）保持原来的形状和大小，用正等测画出来的直观图可以将三个面均匀地表达出来.

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

1 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

本章将在前一章整体观察、认识空间几何体的基础上，以长方体为载体，使学生在直观感知的基础上，认识空间中点、直线、平面之间的位置关系；通过对大量图形的观察、实验、操作和说理，使学生进一步了解平行、垂直关系的基本性质以及判定方法，学会准确地使用空间几何的数学语言表述几何对象的位置关系，体验公理化思想，培养逻辑思维能力，并用来解决一些简单的推理论证及应用问题.

2. 学习目标

（1）直观认识和理解、体会空间中点、直线、平面之间的位置关系，抽象出空间直线、平面之间的位置关系，用数学语言表述有关平行、垂直的性质与判定，并了解一些可以作为推理依据的公理和定理：

公理1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内.

公理2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.

公理3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

公理4：平行于同一条直线的两条直线平行.

定理：空间中如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

（2）以空间几何的上述公理和定理为出发点，通过直观感知、操作确认，归纳出如下的一些判定定理与性质定理：

判定定理：

平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.

一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直.

一个平面过另一个平面的垂线，则两个平面垂直.

性质定理：

一条直线与一个平面平行，则过该直线的任一个平面与此平面的交线与该直线平行.

两个平面平行，则任意一个平面与这两个平面相交所得的交线相互平行.

垂直于同一个平面的两条直线平行.

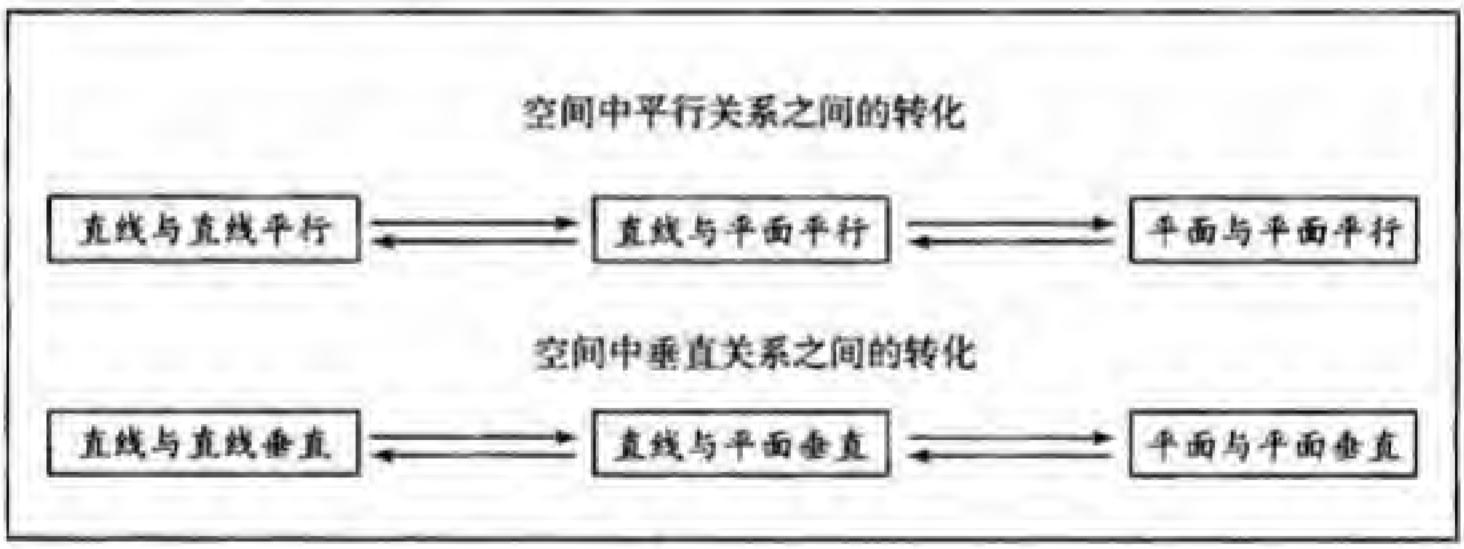
两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

并对性质定理加以证明（判定定理将在选修系列 2 中用向量的方法加以严格的证明）.

（3）运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

（1）通过本章教学，在认识空间点、直线、平面的位置关系的过程中，进一步提高学生的空间想像能力，发展推理能力. 为了更好地达到这一目的，教科书特别加强了过程性，注意从多种角度来培养学生的能力，即不仅强调逻辑推理能力，而且强调合情推理能力. 具体做法是：

先引导学生通过对实际模型的认识，学会将文字语言转化为图形语言和符号语言；以具体的长方体中的点、线、面之间的关系作为载体，使学生在直观感知的基础上，认识空间中一般的点、线、面之间的位置关系；通过对图形的观察、实验和说理，使学生进一步了解平行、垂直关系的基本性质以及判定方法，学会准确地使用数学语言表述几何对象的位置关系，并能解决一些简单的推理论证及应用问题.

（2）点、直线和平面是空间图形最基本的几何元素，空间直线和平面的位置关系是立体几何的基础知识. 学好这一部分内容，对于学生在已有的平面几何知识基础上，建立空间观念，实现从认识平

面图形到认识立体图形的飞跃，是非常重要的.

第一节包括 4 个小节，按照平面，空间中直线与直线之间的位置关系，空间中直线与平面的位置关系，空间中平面与平面的位置关系顺序编排．这 4 个小节之间密切联系，前面第一小节的内容是后面 3 个小节内容的根据，后面内容既巩固了前面内容，又发展和推广了对前面内容的认识，从而形成了一个关于空间直线和平面位置关系的知识体系.

对空间图形问题的研究经常都是借助或转化为平面的问题来解决的．“确定平面”是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要条件，而这种转化又是空间图形中解决许多问题的一种重要思想方法．这种转化的最基本依据就是三个公理．可以说，刻画平面的三个公理是立体几何公理体系的基石，是研究空间图形问题时进行逻辑推理的基础.

2.1 节的核心是空间中直线和平面间的位置关系．从知识结构上看，在平面基本性质的基础上，由易到难顺序研究直线和直线，直线与平面，平面与平面的位置关系．本大节无论在全章的知识系统中，还是在培养学生的辩证唯物主义观点和公理化的思想、空间想象力和思维能力方面，都具有重要的基础作用.

2.2 和 2.3 节内容的编写是以“平行”和“垂直”的判定及其性质为主线展开．依次讨论直线和平面平行、平面和平面平行的判定与性质；直线和平面垂直、平面和平面垂直的判定与性质.

“平行”和“垂直”在定义和描述直线和直线，直线和平面，平面和平面的位置关系中起着重要作用．在本章中它集中体现在：空间中的平行关系之间的转化、空间中的垂直关系之间的转化以及空间中垂直与平行关系之间的转化.

在 2.2 和 2.3 节的教学中，要求对有关直线与平面平行、垂直关系的性质定理进行逻辑论证；对相应的判定定理只要求直观感知、操作确认，在选修课程系列 2 中将用向量方法加以论证.

三、课时分配

本章教学时间约需 10 课时．具体分配如下（仅供参考）：

2.1	空间点、直线、平面之间的位置关系	约 3 课时
2.2	直线、平面平行的判定及其性质	约 3 课时
2.3	直线、平面垂直的判定及其性质	约 3 课时
小　结		约 1 课时

Ⅱ 教科书分析

引言介绍了认识和把握空间几何体的一般方法：从构成空间几何体的点、直线和平面等基本元素入手，研究它们的性质及其相互之间的关系，提出了从整体到局部，再从局部到整体来认识事物的方法，并对本章的主要内容作了概述．教学中可结合例子简要地对上述内容作出适当的解释，使学生对本章的内容有一个初步的印象.

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

一、本节知识结构

平面（公理1、公理2、公理3、公理4）

空间直线、平面的位置关系

直线与直线的位置关系　　直线与平面的位置关系　　平面与平面的位置关系

二、教学重点与难点

重点：空间直线、平面的位置关系；

难点：三种语言（文字语言、图形语言和符号语言）的转换.

三、教科书编写意图与教学建议

学生在第一章的学习过程中，经历了从对空间几何体的整体观察入手，整体认识空间图形的过程. 本节以长方体为载体，直观认识和描述空间中的点、直线、平面的位置关系. 教科书的这种安排，主要是为了使学生尽早地了解空间基本元素的位置关系，给学生一个空间直线、平面位置关系的整体认识，以利于学生实现由认识平面图形到认识立体图形的飞跃，逐步改变学生只习惯于在一个平面内考虑问题的状态，以更好地培养学生的空间想象能力.

本节知识与学生生活的联系密切，如直线与直线位置关系、直线与平面位置关系、面面位置关系等，都可以在学生的生活世界中找到模型. 教学中，既要引导学生多从生活中的实际出发，把所学到的知识同周围的现象联系起来，同时还要注重让学生经历从实际背景中抽象出空间图形的过程，另外，还应注意引导学生通过对实际模型的认识，学会将文字语言转化为图形语言和符号语言.

为使学生建立正确的空间观念，在对图形的认识方面实现由平面到立体的过渡，教科书在内容组织上注意了以下几点：

1. 联系实际提出问题和引入概念，加强由实际模型到图形，再由图形返回模型的基本训练，逐步培养由图形想象出空间位置关系的能力.

2. 从图形入手，有序地建立图形、文字、符号这三种数学语言的联系.

在本节中，立体图形是研究的对象，对它的一般描述是按“三维对象（几何模型）——图形——文字——符号”这种程序进行的. 其中，图形是将考察对象第一次抽象后的产物，是首先使用的数学工具，也是形象、直观的语言. 完成了由三维对象到图形的飞跃，才有可能顺利进行后续内容的学习. 因此，加强图形的运用十分重要. 教科书充分发挥了长方体作为图形语言的载体作用，使图形的典型性、简明性、直观性、概括性及趣味性等得到了较好的表现. 文字语言是对图形的描述、解释与讨论，

符号语言则是文字语言的简化和再次抽象．教科书按照图形语言——文字语言——符号语言——三种数学语言的综合描述的顺序安排内容，在用文字和符号描述对象时，教科书注意紧密联系图形，使抽象与直观结合起来，以帮助学生在图形的基础上发展其他数学语言．在阐述定义、定理、公式等重要内容时，教科书一般是先给出图形，再用文字和符号进行描述，综合运用几种数学语言，使其优势互补，以使学生对它们形成更好的理解．

3．加强与平面图形知识的联系，利用对比、引申、联想等方法，引导学生找出平面图形和立体图形的异同，以及两者的内在联系，逐步培养学生将立体图形转化为平面图形的能力．

2.1.1 平面

1．在本小节之前的“思考”，以分析长方体的顶点、棱所在直线、侧面、底面之间的位置关系问题为引子，提出了本节要研究的主要问题：空间点、直线、平面之间的位置关系．紧接着，教科书对长方体的结构特征进行了描述，从直观上给出了平面与平面平行、相交，直线与平面平行、相交、直线在平面内等位置关系．

2．平面是最基本的几何概念，教科书以课桌面、黑板面、海面等为例，对它加以描述而不定义．教学中借助实例来引入平面的概念是必要的，但需指出几何中的平面是无限伸展的，可以联系直线的无限伸展性来理解．在教学时可结合第 41 页“观察”中的问题，让学生多感受，多举例（具有平面形象的物体）．

教科书给出的平面画法，主要是从“直观性”来考虑的．教学时要引导学生注意：

①画的平行四边形表示的是整个平面．需要时，可以把它延展开来，如同画直线一样，直线是可以无限延展的，但在画直线时却只画出一条线段来表示．

②加“通常”两字的意思是因为有时根据需要也可用其他平面图形来表示平面．

③两个相交平面的画法：当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮住部分的线段画成虚线或者不画，以增强立体感．

3．以点作为元素，直线、平面等都是由点构成的集合．几何中许多符号的规定都出自将图形视为点集．例如，点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 A 不在平面 α 内，记作 $A\notin\alpha$．直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$；直线 l 不在平面 α 内，记作 $l\not\subset\alpha$．这里的点 A 是平面 α 的元素，而直线 l 是平面 α 的子集，因此，在符号的使用上有区别．在介绍有关符号的使用时，结合前面所学的集合知识讲一讲规定符号的背景，可以帮助学生正确使用符号．本小节中使用了 $\in$、$\notin$、$\subset$、$\cap$ 等符号，它们源自集合符号，但在读法上仍用几何语言．例如，$A\in\alpha$，读作“点 A 在平面 α 内”；$a\subset\alpha$，读作“直线 a 在平面 α 内”；$\alpha\cap\beta=l$，读作“平面 α，β 相交于直线 l”．本章中有关的这类符号，在读法上一般都这样处理．本章中几何符号的用法符合有关国家标准的规定．使用时原则上与集合符号的含义一致，但为方便起见，个别地方的用法与集合符号略有不同．例如，直线 a 与 b 相交于点 A，记作 $a\cap b=A$，而不记作 $a\cap b=\{A\}$．这里的 A 既是一个点，又可以理解为只含一个元素（点）的集合．

4．平面的基本性质，即教科书中三个公理，是研究立体图形的理论基础，要求学生充分重视．所谓公理，就是不必证明而直接承认的真命题，它们是进一步推理的出发点和根据．

为了使学生尽快熟悉立体几何中的各种语言表述方法，教科书在给出三个公理时，同时使用了三种语言的描述．如公理 1：

文字语言的描述：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线就在此平面内．

图形语言描述：

符号语言的描述：$A\in l$，$B\in l$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

另外，在给出公理之前，先提出“思考”，引导学生的思维，并结合生活中的例子说明公理所描述

的事实，以帮助学生更好地领会公理．教学中应当注意落实教科书的上述意图，引导学生通过直观感知、操作确认、理性思考，以及三种语言的描述和相互转换，经历公理的归纳、概括过程，形成对公理的完整认识．

公理1的内容反映了直线和平面关系．从集合的角度看，这个公理就是说，如果一条直线（点集）中有两个元素（点）属于一个平面（点集），那么这条直线就是这个平面的真子集．这个结论阐述了两个意思：一是整条直线在平面内，二是直线上所有点在平面内．

公理1有两方面的作用：用它既可判定直线是否在平面内，又可用直线来检验平面．

5. 公理2的内容关系到“确定”平面的条件．应使学生透彻理解公理中“有且只有一个”的含义．这里“有”是说图形存在，“只有一个”是说图形唯一．公理2强调的是存在和唯一两方面，因此，“有且只有一个”必须完整地使用．应向学生指出，不能仅用“只有一个”来替代“有且只有一个”，否则就没有表达存在性．

公理2的教学中，应突出“经过不在一条直线上”和“三点”几个字．可引导学生认识到经过一点、两点或同一直线上的三点可有无数个平面；任给不在同一直线上的四个点，不一定有一个平面同时过这四个点．这样可使学生体会“经过不在同一直线上的三点”这一条件的重要性．

由上述公理可以得到如下三个推论：

推论1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面．

推论2　经过两条相交直线，有且只有一个平面．

推论3　经过两条平行直线，有且只有一个平面．

本教科书没有直接给出这三个推论．教学中可以把它们作为命题讨论，也可作为公理2的一个应用．

6. 公理3指出了两个平面的位置关系．为了使学生准确理解这个公理，教科书以“思考”为引子，引导学生的思维：尽管三角板与桌面只有一个交点，但由于平面的无限延展性，“三角板所在的平面”与“桌面所在的平面”却不止交于一个点．因此，对于不重合的两个平面，只要它们有公共点，它们就是相交的位置关系，交集是一条直线．

公理3的作用有两个：一是作为判定两个平面相交的依据，只要两个平面有一个公共点，就可以判定这两个平面必相交于过这个点的一条直线；二是它可以判定点在直线上：点是某两个平面的公共点，线是这两个平面的公共交线，则这点在交线上．

7. 例1中，安排了关于图形、符号和文字表示之间互相转化的内容，这对初学立体几何的学生来说是很重要的．它有利于训练学生正确地认识和描述空间图形．

8. 为了使学生更好地掌握三个公理，教学中应当多给学生提供观察实物，用三个公理进行判断的机会，特别是要充分利用长方体这个模型．例如：

如图2-1，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，判断下列命题是否正确，并说明理由：

① 直线AC_1在平面CC_1B_1B内；

② 设正方形$ABCD$与$A_1B_1C_1D_1$的中心分别为O，O_1，则平面AA_1C_1C与平面BBD_1D的交线为OO_1；

③ 由点A，O，C可以确定一个平面；

④ 由A，C_1，B_1确定的平面是ADC_1B_1；

⑤ 由A，C_1，B_1确定的平面与由A，C_1，D确定的平面是同一平面．

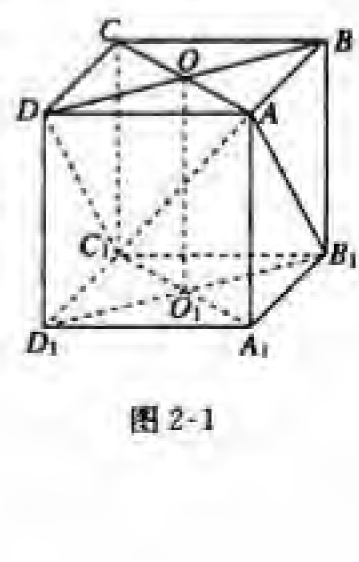


图2-1

2.1.2　空间中直线与直线之间的位置关系

1. 空间直线的三种位置关系在现实中大量存在，学生对它们已有一定的感性认识．其中，相交直线和平行直线都是共面直线，学生对它们已很熟悉．异面直线的概念是学生比较生疏的，也是本小节的重点和难点．

2. 空间两条直线的位置关系，是在平面中两条直线位置关系及平面的基本性质的基础上提出来的．它既是研究空间点、直线、平面之间各种位置关系的开始，又是学习这些位置关系的基础．因此要特别注意有一个好的开头，使学生逐步养成在空间考虑问题的习惯．

3. 空间两条不重合的直线有三种位置关系．教科书以“思考”以及学生身边的实例引出空间两条直线位置关系问题，在学生获得空间中的两条直线存在“既不相交也不平行”的位置关系的直观感知后，以长方体为载体，引出异面直线的概念．并以“共面”和“异面”为标准，将空间直线分成两类．这样做的目的是使空间中两直线的位置关系与平面中两直线的位置关系相协调，特别是使空间中两直线的平行与平面上两直线平行的意义保持一致．实际上，两条直线相互平行，首先是两直线在同一平面内，其次是它们不相交．

若从有无公共点的角度看，也可以分为两类：

① 有且仅有一个公共点——平行直线；

② 没有公共点——$\begin{cases}\text{平行直线，}\\ \text{异面直线．}\end{cases}$

4. 异面直线概念的教学，应遵循由具体例子到抽象概念的原则．除了正例外，还要注意使用反例以帮助学生辨析．特别是要让学生理解，“不同在任何一个平面内的两条直线”，是指这两条直线不能同在任何一个平面内，而不能由 $l_1\subset\alpha$，$l_2\subset\beta$ 就说 l_1，l_2 一定是异面直线．两条直线是异面直线，等价于这两条直线既不相交也不平行．

表示异面直线时，以平面为衬托可以显示得更清楚．否则，就难以画出使人一目了然的两条异面直线，而容易与两条直线互相混淆．

教科书在第 46 页安排了“探究”，目的是让学生会根据异面直线的定义判断在几何体上的具有异面直线位置关系的两条直线．教学时，可以引导学生先把图画在纸上，复原成正方体来观察，也可以直接画出正方体的直观图，或用计算机来演示正方体的直观图．下面是这个“探究”的解答．

答：共有三对，它们是直线 EF 和直线 HG，直线 AB 和直线 HG，直线 AB 和直线 CD．

5. 公理 4 表明了平行的传递性，可以作为判断两条直线平行的依据，同时它还给出了空间两条直线平行的一种证法．其重要且直接的作用是证明等角定理，为下一步研究异面直线所成角打基础．

教科书仍以长方体为载体，通过“观察”引入公理 4．为了使学生更好地形成对公理 4 的直观感知，教学时还可以使用一些学生熟悉的例子，例如“将一本打开的书倒扣在桌面上，书脊所在的直线 l 与书的各页的另一边都平行（即与书的每一页与桌面的交线平行）”．

例 2 及紧接着的“探究”，是公理 4 的应用．探究的结论是

（1）四边形 $EFGH$ 是平行四边形；

（2）四边形 $EFGH$ 是菱形．

6. “等角定理”是由平面图形推广到立体图形而得的．因此，教科书以“思考”开始，提出能否把“等角定理”推广到空间的问题．为了使学生形成直观认识，教科书先引导学生观察长方体中的有关图形．教学中，除了使学生领会“等角定理”外，还要注意提醒学生，并非所有关于平面图形的结论都可以推广到空间中来．对此可用反例适当解释．一般说，要把关于平面图形的结论推广到立体图形，必须经过证明．

等角定理是定义异面直线所成角的理论基础.

7. 异面直线所成的角是由两条相交直线所成的角扩充而生成的. 当两条异面直线在空间的位置确定后，它们所成的角的大小也就随之确定了. 异面直线所成的角，是指这两条直线经过平移后处于相交位置时所成的锐角或直角. 因此，异面直线所成的角的范围是$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. 两条异面直线互相垂直，即它们所成的角是直角，这是两条直线异面的一种特殊位置关系.

寻找两条异面直线 a，b 所成角时，要经过空间任一点 O 作直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$. 这里涉及经过空间任意一点如何引平行线的问题. 由公理 2 知：经过一条直线（在直线上取两个点）及直线外的一点，有且仅有一个平面，因此，经过直线 a 及空间不在直线 a 上的一点 O，可确定一个平面 α. 在平面 α 内，经过点 O 作 $a'\parallel a$. 这样的直线 a' 就是过直线 a 外一点，平行于直线 a 的直线.

通过画平行线的方式，使两条异面直线移到同一平面的位置上，是研究异面直线所成的角时经常要使用的方法，这种把立体图形的问题转化为平面图形问题的思想方法很重要，要让学生在学习中认真体会.

8. 教科书 48 页的“探究”和例 3，还是以学生熟知的长方体和正方体为载体，使学生在直观感知的基础上，认识空间中一般的直线与直线之间的位置关系，使学生初步掌握依据定义、定理对空间图形进行推理论证、计算的方法. 另外，“探究”中的第 3 问再次提醒学生，同一平面内成立的结论，不一定能够推广到空间中来.

2.1.3 空间中直线与平面之间的位置关系

1. 与前面的处理方法一致，教科书以生活中的实例以及长方体为载体提出直线与平面位置关系种数问题. 教学时，除了引导学生以长方体为载体分析相应的直线与平面的位置关系外，还可以引导他们观察教室内地面、天花板、墙面的相交线：墙面与地面的相交线在地面内，相邻两墙面的相交线与地面只相交于一点；天花板与墙面的交线与地面没有公共点. 这反映出直线和平面间存在着不同的位置关系.

再如：在黑板上画一条直线，这条直线就在黑板面内；电线杆及加固电线杆的铁缆和地面只相交于一点；教室里的日光灯管所在直线和地面、课桌的一边所在直线和地面都没有公共点.

这些实例都可以给学生关于直线与平面位置关系的直观感知. 在学生形成直观感知的基础上，再对这些实物做正确的抽象，比如“地面”“天花板’“墙面”等，均应想象成“平面”；“电线杆”“加固电线杆的铁缆”“日光灯管”等，均想象成“直线”. 这样，才能形成“直线”与“平面”位置关系的正确形象.

2. “思考”中有一个实际操作：拿一支笔（看做一条直线）和一个作业本（看做一个平面），观察它们可能出现的位置关系，通过操作使学生直观感知直线和平面的三种位置关系，这三种情况分别对应于直线和平面的公共点的个数为：无数个，1 个，0 个.

3. 对于一条直线和一个平面的位置关系，在公理 1 中曾经提及：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线就在此平面内. 即如果一条直线和一个平面有两个或两个以上的公共点，那么这条直线就在这个平面内. 现在再讨论一条直线不在一个平面内的情况，得到①一条直线和一个平面只有一个公共点，这时我们说这条直线和这个平面相交；②一条直线和一个平面没有公共点，这时我们说这条直线和这个平面平行. 于是直线和平面的位置关系可以归纳为：

①**直线在平面内**——有无数个公共点；

②**直线和平面相交**——有且只有一个公共点；

③**直线和平面平行**——没有公共点.

在直线和平面的位置关系中，直线和平面平行，直线和平面相交，统称直线在平面外. 可以用符号 $a\not\subset\alpha$ 来表示 $a\parallel\alpha$，$a\cap\alpha=A$ 这两种情形.

2.1.4 平面与平面之间的位置关系

关于两个平面的位置关系，教科书通过“思考”给出了两个实例，引导学生通过直观感知、操作确认的方法进行认识. 教学时还可以让学生观察教室的墙壁、地面、屋顶等，或观察实物模型（如长方体）并说出相应的位置关系. 可以看到：教室里的天花板和地面没有公共点；墙面与地面则有一条公共的直线. 这些面的关系，反映出不重合的两个平面的不同的位置关系. 由观察结果归纳出两个平面的两种不同位置关系的区别在于它们是否有公共点. 这与两条直线的位置关系相类似. 两个平面要么有无数个公共点，且这些公共点的集合是一条直线；要么没有公共点. 当两个平面没有公共点时，它们互相平行. 表示两个平面平行时，应把表示这两个平面的平行四边形画成对应平行.

也可以从直线与直线，直线与平面的各种位置关系，类比联想平面与平面的位置关系可能有哪些情况，并给出相应的定义. 例如可以启发学生回答下列问题：

①“直线与直线，直线与平面，平面与平面它们之间没有公共点就平行，平行就没有公共点”这句话对吗？为什么？

这里突出直线与直线是在同一平面内没有公共点才平行，而异面直线没有公共点但不在同一平面内.

②“直线与直线，直线与平面，平面与平面它们之间有两个公共点时，它们的位置关系如何?”

这时两条直线重合；直线在平面内；平面与平面就相交于过这两点的定直线.

③“如果平面与平面有三个公共点时位置关系如何?”

这里突出相交与重合两种情况.

通过这样的讨论，使学生明确定义既表明了各种位置关系的共同本质特征，同时还可以用定义判断是否存在相应的位置关系.

第 51 页“探究”中的问题，可以这样来帮助学生理解和分析：由面面平行的定义可以看出，直线 a，b 分别在平面 α、平面 β 内，因此直线 a，b 是不可能有公共点的. 因为若有公共点，那么这个点也必是两个平面的公共点，两个平面就不可能平行了. 因此应该说，这两条直线不相交（是平行直线或异面直线）.

四、补充例题

1. AB，CD 是表示平面 α，β 的两个平行四边形的边，EF 是 α 与 β 的交线，根据给出的条件画出两个相交平面 α，β.

（第 1 题）

2. 用符号表示语句：“直线 l 经过平面 α 内一定点 P，但 l 在 α 外.”，并画出图形.

3. 下列四个命题中假命题的个数是（　　）

① 两条直线都和同一个平面平行，则这两条直线平行.

② 两条直线没有公共点，则这两条直线平行.

③ 两条直线都和第三条直线垂直，则这两条直线平行.

④ 一条直线和一个平面内无数条直线没有公共点，则这条直线和这个平面平行.

A. 4　　　　　　　B. 3　　　　　　　C. 2　　　　　　　D. 1

4. 平面α与β平行，且$a\subset\alpha$，下列四个命题中

①a与β内的所有直线平行　　　　　②a与β内的无数条直线平行

③a与β内的任何一条直线都不垂直　　④a与β无公共点

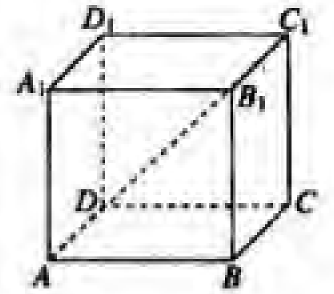
其中真命题的个数是（　　）

A. 1　　　　　　　B. 2　　　　　　　C. 3　　　　　　　D. 4

5. a，b是异面直线，b，c是异面直线，则a，c的位置关系是（　　）

A. 相交、平行或异面　　B. 相交或平行　　C. 异面　　D. 平行或异面

6. 如图，在正方体$ABCD\text{—}A_1B_1C_1D_1$中，与对角线DB_1成异面直线的棱共有几条？



（第 6 题）

五、习题解答

练习（第 44 页）

1. D.

2. (1) 四个平面；　(2) 一个或三个平面.

3. (1) ×；　(2) √；　(3) √；　(4) √.

4. (1) $A\in\alpha$，$B\notin\alpha$，图略；　(2) $M\notin\alpha$，$M\in a$，图略；　(3) $a\subset\alpha$，$a\subset\beta$，图略.

练习（第 49 页）

1. (1) 3 条；(2) 可能相等，也可能互补.

2. (1) 45°；(2) 60°.

练习（第 50 页）

B

练习（第 51 页）

1 条或 3 条

习题 2.1　A 组

1. 图略.

2. 图略.

3. 1 条或 3 条（图略）.

4. (1) √；(2) ×；(3) √；(4) ×；(5) ×.

5. (1) θ；(2) 8 条；(3) 2 个；(4) 平行或在平面内；(5) $b/\!/\alpha$，或b与α相交；
   (6) 可能相交，也可能是异面直线.

6. 两条平行直线确定一个平面，第三条直线有两点在此平面内，所以它也在这个平面内. 于是，这三条直线共面.

7. 提示：利用平行关系的传递性证明$BB' \underline{\parallel} CC'$，然后由平行四边形的性质得$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$，故得$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

8. 3 个，3 个.

9. 27 部分.

B组

1. (1) C; (2) D; (3) C.

2. 证明：因为 $AB\cap\alpha=P$，$AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $P\in$ 平面 ABC，$P\in\alpha$，

所以 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

同理可证，Q 和 R 均在这条交线上.

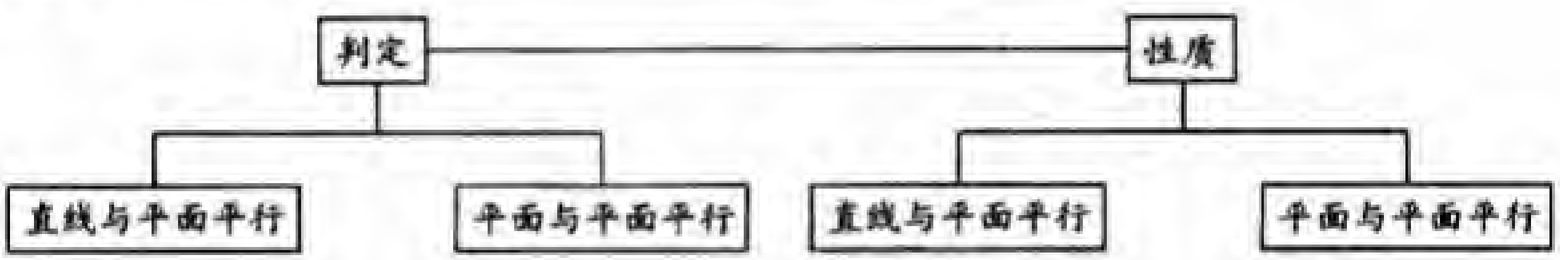
所以 P，Q，R 三点共线.

先确定一条直线，再证明其他点也在这条直线上.

3. 提示：直线 EH 和 FG 相交于点 K；由点 $K\in EH$，$EH\subset$ 平面 ABD，得 $K\in$ 平面 ABD. 同理可证：点 $K\in$ 平面 BCD. 而平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，因此，点 $K\in$ 直线 BD. 即 EH，FG，BD 三条直线相交于一点.

2.2 直线、平面平行的判定及其性质

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：通过直观感知、操作确认，归纳出判定定理和性质定理.

难点：性质定理的证明.

三、教科书编写意图与教学建议

本节教科书内容的处理上，按照“直观感知—操作确认—思辨论证—度量计算”的认识过程展开. 先通过直观感知和操作确认的方法，概括出直线与平面平行、平面与平面平行的判定定理，然后再对直线与平面平行的性质、平面与平面平行的性质作出严密的逻辑论证. 通过对图形的观察、实验和说理，使学生进一步了解空间的直线、平面平行关系的基本性质及判定方法，学会准确地使用数学语言表述几何对象的位置关系，并能解决一些简单的推理论证及应用问题.

高中立体几何课程历来以培养学生的逻辑思维能力和空间想象力为主要目标. 教科书根据“认识空间图形，培养和发展学生的几何直觉、运用图形语言进行交流的能力、空间想象能力与一定的推理论证能力”的新要求在内容安排和处理方式上，加强了引导学生通过自己的观察、操作等活动获得数学结论的过程，把合情推理作为学习过程中的一个重要的推理方式. 在空间直线、平面之间的平行、垂直关系的判定定理、性质定理的得出过程中，注重对典型实例的观察、分析，给学生提供动手操作

的机会，引导学生进行归纳、概括活动，在经历观察、实验、猜想等合情推理活动后，再进行演绎推理、逻辑论证．另外，教科书通过“观察”“思考”“探究”等向学生提出问题，以问题引导学生的思维活动，使学生在问题带动下进行更加主动的思维活动，经历从实际背景中抽象出数学模型、从现实的生活空间中抽象出几何图形和几何问题的过程，注重探索空间图形性质的过程．

2.2.1　直线与平面平行的判定

1．直线和平面平行的判定定理，是通过直线和平面内的一条直线平行来判定直线和平面平行．这个定理用符号来表示，就是

$$\left.\begin{array}{l}a\not\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha.$$

应用此定理时，要注意3个条件必须齐备．

2．教科书首先说明可以用直线与平面平行的定义来判断直线和平面平行，但用定义不方便，由此引发探索判定定理的需要．教科书通过引导学生观察门扇的对边互相平行，进一步得出门扇不论转动到什么位置，它能活动的竖直的一边始终平行于固定的竖直边所在的墙面，以及通过“观察”，引导学生观察书的边缘与书面的位置关系．在此基础上，教科书提出了两个探究性的问题：

如图，平面α外的直线a平行于平面α内的直线b．

① 这两条直线共面吗？

② 直线a与平面α可能相交吗？

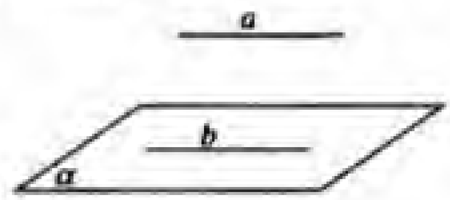


图 2-2

通过上述“直观感知，操作确认”活动，教科书给出了直线与平面平行的判定定理，但没有给出判定定理的严格的逻辑证明（教学中不必对证明进行补充）．

3．判定直线与平面平行主要有以下几种方法：

① 利用定义：证直线与平面无公共点；

② 利用直线和平面平行的判定定理：从直线与直线平行得到直线与平面平行．

另外，在学习了平面与平面平行的性质后，还可以通过证明平面与平面平行，得到直线与平面平行．

实际上，平行问题以无公共点为基本特征，抓住这一点，直线与直线平行、直线与平面平行和平面与平面平行问题就迎刃而解．

2.2.2　平面与平面平行的判定

1．与直线与平面平行的判定一样，平面与平面的平行也可以通过定义来判断，也即通过两个平面没有公共点得到两个平面平行．不过这样做较麻烦．根据已有的“空间问题平面化”的经验，自然想到通过一个平面内的直线与另一平面平行来得到两个平面无公共点，不过由于一个平面内的直线有无数条，我们难以对所有直线逐一检验，联想到“两条相交直线确定一个平面”，于是只要找到一个平面内的代表——相交的两条直线，只要它们与另一平面平行，就可以判定这两个平面平行，这样就引出了两个平面平行的判定定理．

教科书通过“探究”：

① 平面β内有一条直线和平面α平行，α，β能否平行？

② 平面β内有两条直线和平面α平行，α，β能否平行？

向学生提出了如何选择两条直线的问题，并结合长方体模型，引导学生进行合情推理．通过操作

确认，归纳出“平面与平面平行的判定定理”．教学中，可以让学生观察具体的长方体实物模型，以增强对判定定理的直观感知．

2. 判定两个平面平行的真命题很多，之所以把“一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行”当成判定定理，是因为这个定理实现了将平面与平面平行的判定，转化为已有的直线与平面平行的判定，而判定直线与平面平行，常转化为判断直线与直线平行，所以判定平面与平面平行的基本思想还是“平面化”．

利用判定定理证明两个平面平行，必须具备以下两个条件：

(1) 有两条直线平行于同一个平面；(2) 这两条直线必须相交．

2.2.3 直线和平面平行的性质

1. 教科书首先通过“思考”提出了两个问题，从而引出直线和平面平行的性质问题．接着以长方体为载体，对这两个问题进行探究，通过操作确认，先得出直线与平面平行的性质的猜想，然后通过逻辑论证，证明猜想的正确性，从而得到性质定理．教学中，应当注意让学生充分经历上述过程，使学生在建立了对性质的充分感知后，再进行推理论证，切不可在直观感知、获得猜想的环节上节省时间．对于平面与平面的性质定理的获得过程也要注意这一点．

教学时应当引导学生注意，对直线与平面平行性质的研究，就是研究在直线与平面平行的条件下，能够推出一些什么结论的问题．教科书中推出的是直线和平面内的某些直线平行，这些直线是由过已知直线的平面与已知平面的交线得到的（实际上，这些交线是相互平行的）．这个定理用符号来表示，即

$$\left.\begin{array}{l} a /\!/ \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ b.$$

另外，还要防止学生误解为“一条直线平行于一个平面，就平行于这个平面内的一切直线”．

性质定理可以作为直线和直线平行的判定方法．性质定理中有三个条件：

① 直线 a 和平面 α 平行；

② 平面 α 和平面 β 相交于直线 b；

③ 直线 a 在平面 β 内．

这三个条件阐明了一条直线与两个平面及它们的交线之间的位置关系，是判断直线与直线平行时缺一不可的条件．

2. 解决例 3 是，有的学生可能会想，为什么不可以直接过点 P 作 BC 的平行线呢？为了解决这个疑问，可以让学生动手在一个实物模型上画一画，看看能否保证画出的直线一定与已知直线平行．另外，还可以引导学生思考：若 $a /\!/ \alpha$，怎样在平面 α 内找到一条直线 b，使 b 经过平面内的一个点 A，并且 $b /\!/ a$？并把学生的思维引导到用性质定理解决问题上来，即过已知直线和点 A 作一个平面和已知平面相交，交线和已知直线平行．此交线就是要找的直线 b．

另外，例 3 是一个作图题，一般来说，作出图形后，需要对做法的正确性进行论证．

3. 例 4 的解答渗透了解决立体几何问题的重要思想方法——化归思想：将直线与平面平行问题化归为直线与直线平行问题，再由直线与直线平行来判定直线与平面平行．这种思想方法常用而且有效，但是学生过去接触不多，教学中应当多做引导，使学生有更多的机会接触和应用这种思想方法．

2.2.4 平面与平面平行的性质

1. 与上一小节的思路一样，平面与平面平行的性质，是在两个平面平行的条件下，能够推出哪些

结论．教科书以长方体为载体，对问题进行了分析．实际上，两个平面α，β平行时，其中一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面，联系直线与平面平行的性质定理，可以用过α内的直线作平面γ与平面β相交的方法，得到两条相互平行的直线．这正是性质定理所给出的结论．实际上，两个平面平行时，分别在这两个平面内的两条直线可能相互平行，也可能是异面直线．

2. 从上面的分析可以看出，之所以把“如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行．”作为性质定理提出来主要是这个定理将平面与平面平行的性质化归为一个平面问题，即化归为“直线与直线平行”．实际上，在两个平面平行的条件下，可以推出的结论是非常多的．例如，“如果一个平面与两个平行平面中的一个平行，那么它也与另一个平行．”“如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个，那么它也垂直于另一个”……教学时，可以通过类比直线与直线平行的性质、直线与平面平行的性质，引导学生自己推出一些“性质”．

3. 在推导平面与平面平行的性质定理时，教科书还是采用了直观感知到猜想结论再到推理论证的思路．教学时，应当引导学生开展“在两个平面相互平行的条件下到底能够推出哪些结论”的探究活动．另外，还要注意引导学生分析定理的结构特征，即两个平面平行以及“与第三个平面相交”是条件，“交线平行”是结论．

4. 平面平行的判定定理与性质定理的作用，都集中在“平行”两字上．判定定理解决了“在什么样的条件下两个平面平行”；性质定理揭示了“两个平面平行的条件下可以获得什么样的结论”．前者给出了一种判定两个平面平行的方法；后者给出了一种判定两条直线平行的方法．

四、习题解答

练习（第 57 页）

1. (1) 面$A'B'C'D'$，面$CC'D'D$；(2) 面$DD'C'C$，面$BB'C'C$；(3) 面$A'D'B'C'$，面$BB'C'C$.
2. BD_1∥面AEC．设BD与AC交于点O，连接E、O，则因为点E、O分别为DD_1与BD的中点，可证$EO/\!/BD_1$．从而，BD_1∥面AEC.

练习（第 59 页）

1. (1) 命题不正确．反例，如$\alpha\cap\beta=l$，$m/\!/l$，$n/\!/l$符合题意，但α不平行于β.
   (2) 命题正确．利用面面平行的定义可证．
2. 容易证明$AB/\!/A'B'$，$BC/\!/B'C'$，于是$A'B'$∥平面ABC，$B'C'$∥平面ABC，平面$A'B'C'$∥平面ABC.
3. D.

练习（第 63 页）

(1) ×；(2) ×；(3) ×；(4) √.

习题 2.2　A 组

1. (1) A；(2) D；(3) C.
2. (1) 平行或相交；(2) 异面或相交．
3. 证明：(1) 因为E、F、G是各边中点，所以有$\left.\begin{matrix}FG/\!/BD\\ BD\not\subset\text{平面 }EFG\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD/\!/\text{平面 }EFG$；
   (2) 同样可证AC∥平面EFG.
4. 过a上任一点P作直线b'，使$b'/\!/b$．a与b'两相交直线确定的平面为α.
5. 连结CD，

$$\left.\begin{matrix}AB/\!/\alpha\Rightarrow AB/\!/CD\\ AC/\!/BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow AC=BD.$$

6. 解：$\left.\begin{array}{l}AB/\!/\alpha\\AB\subset\beta\\CD\subset\beta\\CD\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow AB/\!/CD$. 同样可证 $AB/\!/EF$，于是 $CD/\!/EF$.

7. 提示：容易证明 $AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$. 进而可证平面 $ABC/\!/$平面 $A'B'C'$.

8. 提示：容易证明 $AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$. 进而可证平面 $ABC/\!/$平面 $A'B'C'$.

B组

1. 过平面 VAC 内一点 P 作直线 $DE/\!/AC$，交 VA 于 D，交 VC 于 E；过平面 VBA 内一点 D 作直线 $DF/\!/VB$，交 AB 于 F，则 DE，DF 所确定的截面为所求. 理论依据是直线与平面平行的判定定理.
2. 证明：设 P 为 b 上任意一点，则 a 与 P 确定一平面 γ. $\beta\cap\gamma=c$，$c/\!/a$，所以 $c/\!/\alpha$. 又 c 与 b 有公共点 P，且 c 与 b 不重合（否则 $a/\!/b$，与已知矛盾），即 c 与 b 相交. 由 $b/\!/\alpha$，可证 $\alpha/\!/\beta$.
3. 连结 AF，交 β 于 G，连结 BG，EG，则由 $\beta/\!/\gamma$ 得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GF}.$$

由 $\alpha/\!/\beta$ 得 $\frac{AG}{GF}=\frac{DE}{EF}$，$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

4. 正确的是（1）（2）（4）（5）.

2.3 直线、平面垂直的判定及其性质

一、本节知识结构

二、教学重点与难点

重点：直观感知、操作确认，概括出判定定理和性质定理；

难点：性质定理的证明.

三、教科书编写意图与教学建议

本节内容的处理继续遵循"直观感知—操作确认—思辨论证—度量计算"的认识过程展开. 直线与平面垂直、平面与平面垂直的判定定理通过具体实例，按照直观感知、操作确认的方式得出，并用精确语言表达；直线与平面垂直、平面与平面垂直的性质定理则在观察、操作的基础上作出猜想，然后通过推理论证，得出猜想的正确性.

2.3.1 直线与平面垂直的判定

1. 直线和平面垂直，是直线和平面相交中的一种特殊情况. 教科书通过旗杆与地面的位置关系，大桥的桥柱和水面的位置关系等，让学生感知直线与平面垂直这种位置关系，再提出“一条直线与一个平面垂直的意义是什么?”的思考，并通过分析旗杆与它在地面上的射影的位置关系引出了直线和平面垂直的概念.

教学中，除了认真分析教科书中的例子外，还应当借助其他直线与平面垂直的例子，让学生多感知. 例如，可以借助长方体模型来感知直线与平面的垂直关系，如图 2-3，长方体的任意一条棱都具备下列三个特点：

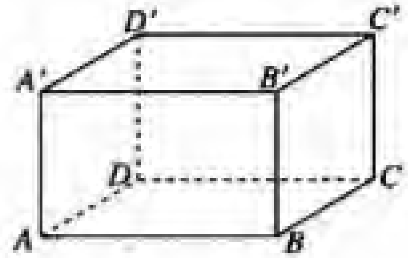


图 2-3

① 在两个面内，如，$AB\subset$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABB'A'$；

② 与两个面平行，如，$AB/\!/$平面 $A'B'C'D'$，$AB/\!/$平面 $CDD'C'$；

③ 与两个面垂直，如，$AB\perp$平面 $AA'D'D$，$AB\perp$面 $BB'C'C$.

长方体的这些特点启示我们，把直线与平面的垂直关系嵌入其中，能够在很大程度上增强空间图形的直观性，有助于空间想象能力的形成.

2. 在讲直线和平面垂直的定义时，应强调，一条直线垂直于一个平面，是指这条直线垂直于这个平面内的任何一条直线. 由此，我们经常使用下面的命题：

$$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b.$$

利用直线和平面垂直的定义直接判定直线和平面垂直，需要考察平面内的每一条直线与已知直线是否垂直，这在实际运用时有困难（由于平面内的直线有无数条）. 直线和平面垂直的判定定理则解决了上述困难. 根据这一定理，只要在平面内选择两条相交直线，考虑它们是否与平面外的直线垂直即可. 这个定理将原本判定直线和平面垂直的问题，通过判定直线和直线垂直来解决. 从获得判定定理的思维过程来看，与获得直线与平面平行、平面与平面平行的判定定理的过程类似，虽然平面内的直线有无数多条，但它却可以有两条相交直线完全确定，因此是否有“一条直线和平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线就与平面内的任意直线垂直”就成为重点考察的问题. 当然，学生这时也许会问，两条平行直线也确定一个平面，为什么不能用“一条直线与平面内的两条平行直线垂直来判断呢?”这时可以引导学生通过操作模型来认识其原因. 实际上，由公理 4 可知，平行具有“传递性”，因此一条直线与平面内的一条直线垂直，那么它与这个平面内的平行于这条直线的所有直线都垂直（这也可以让学生通过操作来确认），但不能保证与其他直线垂直.

另外，直线与平面垂直的判定定理，体现的仍然是“平面化”的思想. 当然，通过直线与直线垂直判断直线与平面垂直，还蕴涵了“降维”思想.

3. 为了更好地培养学生的几何直观能力，使他们在直观感知、操作确认的基础上，归纳、概括出直线和平面垂直的判定定理，教科书安排了一个“探究”实验：通过折叠三角形纸片，探究在什么条件下，就能使折痕与桌面垂直. 教学时，应当让所有学生动手实验，自己发现“当且仅当折痕 AD 是 BC 边上的高时……”，并组织学生对 69 页中的“思考”进行交流，然后再得出一般的结论（即判定定理）. 同直线与平面、平面与平面平行的判定定理教学一样，一定要给学生充分的时间进行探索活动.

4. 本小节的例 2 给出了一个判定直线和平面垂直时常用的命题：

$$\left.\begin{matrix} a/\!/b \\ a\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha.$$

这个命题体现了平行关系与垂直关系之间的联系.

2.3.2 平面与平面垂直的判定

1. 平面与平面垂直需要用“二面角”的概念. 实际上，两个平面相交时，它们的相对位置可由两个平面所成的“角”确定. 为了加强学生对二面角概念的直观感知，教科书利用修筑水坝、发射人造卫星这两个实例，引出二面角的概念. 教学时还可以再举一些实例，例如，教室的门在打开的过程中与墙面成一定的角度；书本翻开的过程中，两张纸面呈一定的角度等等，以增加学生对二面角的感性认识.

2. 二面角定量地反映了两个平面相交的位置关系，但是如何来度量二面角的大小是一个难点. 根据定义两条异面直线所成角的经验，自然想到用“平面化”的思想来定义两个（半）平面所成的角，即用“平面角”来度量“二面角”.

当我们选择某种方法度量一个量时，必须考虑“唯一性”问题，例如前面的两条异面直线所成的角的定义，考虑了“唯一性”. 那么用什么样的平面角来度量二面角才能保证唯一性呢？已有的几何知识给我们这样的经验，在各种几何元素的位置关系中，垂直具有“唯一性”，可以作为分界点. 实际上，如果在二面角的棱上任找一点，从这一点出发分别在两个半平面内任作一条射线，虽然它们可构成一个平面角，但这样的角的大小会由于所作的射线的位置不同而改变，因而不具有“唯一性”. 但如果所作射线与二面角的棱垂直，因为在一个面内经过棱上一点只能引棱的一条垂线，所以过棱上一点所作的角是唯一确定的. 另外，由平面几何知识，在一个平面内和同一直线垂直的两条直线平行，所以在棱上取不同点所作角的大小相等. 因此，这样的角可以刻画二面角的大小. 事实上，二面角的平面角就是垂直于二面角的棱的平面与二面角相交所得两条射线（端点重合）所成的角.

在二面角概念的教学中，要让学生体会以下几点：

（1）二面角的大小是用平面角来度量的；

（2）二面角的平面角的大小由二面角的两个面的位置唯一确定，与棱上点的选择无关；

（3）平面角的两边分别在二面角的两个面内，且两边都与二面角的棱垂直，由这个角所确定的平面和二面角的棱垂直.

3. 两个平面互相垂直是两个平面相交的特殊情况. 教科书通过“观察”引导学生观察教室相邻的两个墙面与地面构成的二面角的大小，从而引出两个平面垂直的位置关系. 日常生活中，两个平面互相垂直的例子大量存在，教学时可多结合实例，引导学生进行观察.

两个平面互相垂直的概念，与两条直线互相垂直的概念，都是通过所成的角是直角定义的，教学中可以对这两个概念进行类比.

4. 在归纳两个平面垂直的判定定理时，可引导学生类比归纳平面与平面平行的判定定理的过程，即把平面与平面的位置关系化归为直线与平面的位置关系. 另外还可引导学生观察身边的现象，如“建筑工人砌墙”，“门框 AB 与地面 β 垂直，经过门框 AB 的门面 α 不论转动到什么位置，都有门面垂直于地面，即 $\alpha\perp\beta$. 这种现象能给我们以什么启示呢？”

5. 例 3 和紧接着的“探究”，研究的是同一个四面体. 教学中，除了研究平面与平面互相垂直的关系外，还可以让学生探究：四面体的四个面的形状（都是直角三角形）；有哪些直线与平面垂直；任意两个面所成的二面角的大小如何计算（如何确定其平面角）等等.

2.3.3 直线与平面垂直的性质

1. 直线与平面垂直的性质定理，考察的是在直线与平面垂直的条件下，可以得出哪些结论. 教科书通过“思考”提出“能否在黑板上画一条直线与地面垂直”的问题，并引导学生观察长方体模型中垂直于某一个面的四条棱之间的位置关系，然后再进一步提出问题：已知直线 a，b 和平面 α，如果

$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，那么，直线 a，b 一定平行吗？接着用反证法，证明了直线与平面垂直的性质定理的正确性．教学时，应当让学生在观察长方体模型的基础上，进行操作确认，获得对性质定理正确性的认识，然后再进行推理论证．

由于证明直线与平面垂直的性质定理使用了反证法，而学生对反证法不太熟悉，因此教学中教师应当进行适当引导．

2．直线和平面垂直的性质定理，实际上是 2.3.1 节中例 2 给出的命题的逆命题．这两个命题的关系可用符号表示如下：当 $a\perp\alpha$ 时，$a/\!/b\Leftrightarrow b\perp\alpha$．

直线与平面垂直的性质定理给出了判定两条直线平行的又一种方法，显然，在立体几何中判定两条直线平行的方法比在平面几何中更多，这里可以让学生做个归纳总结．但无论怎样，基本思路还是通过以平面或直线为桥梁，在“平行”与“平行”、“平行”与“垂直”之间进行相互化归来实现的．

3．例 4 的答案虽然有多种不同的表述方式，但归纳起来只有两种情况：

① a，b 分别在正方体的两个相对面内，此时必为这两个面与第三个平面的交线；

② a，b 分别在正方体的两个相邻面内，此时必与这两个面的交线平行．

2.3.4　平面与平面垂直的性质

1．平面与平面垂直的性质，讨论的是在两个平面相互垂直的条件下，能够推出一些什么结论．教科书通过“思考”向学生提出“如何在黑板上画一条与地面垂直的直线”的问题，并充分利用长方体模型，通过问题引导学生感知在相邻两个相互垂直的平面中，有哪些特殊的直线、平面的关系．然后通过操作，确认两个平面垂直的性质定理的合理性，进而提出猜想，最后进行逻辑推理，证明性质定理成立．这个过程采用的思路仍然是“直观感知、操作确认、推理证明”，这是符合学生学习立体几何知识，培养空间观念、空间想象能力以及逻辑推理能力的基本规律的．

2．到本小节，学生已经学了直线与平面、平面与平面垂直的判定定理和性质定理，教学中可以引导学生思考这些定理之间的相互联系．实际上，由直线和平面垂直可以推出两个平面相互垂直，而由两个平面相互垂直又可以推出直线和平面垂直．这一方面说明两种垂直之间有密切的联系，另一方面也说明两者可以互相转化．

3．本小节 76 页的“思考”，实际上是在两个平面垂直的前提下，过其中一个平面内一点作另一个平面的垂线，这条垂线只能在这个平面内．在推理中使用了“同一法”，即为了证明 $a\subset\alpha$，先作出 $b\subset\alpha$，然后证明 a 与 b 是同一直线．这种论证方法只要求学生理解思路即可，不必安排较多的用同一法证明的练习题．

四、教学设计案例

2.3.1　直线与平面垂直的判定

1．教学任务分析

通过教学活动，使学生了解、感受直线和平面垂直的定义．探究判定直线与平面垂直的方法．

2．教学重点和难点

重点：直线与平面垂直的定义、判定定理的探究，同时它们也是难点．

3. 教学基本流程

从直线与平面垂直的实际背景引入课题

↓

构建直线与平面垂直的概念

↓

探究直线与平面垂直的判定定理

↓

直线与平面垂直判定定理的应用

↓

课堂小结与作业

4. 教学情境设计

问　题	设计意图	师生活动
1. 现实生活中，我们经常看到一些直线与平面垂直的形象，但一条直线与一个平面垂直的确切意义到底是什么呢？	从实际背景出发，直观感知直线与平面垂直的位置关系	教师通过结合旗杆与地面的位置关系，大桥的桥柱和水面的位置关系，让学生感知线面垂直这种位置关系，提出问题，并组织学生思考、讨论．注意引导学生从实际背景“观察直立于地面的旗杆及它在地面的影子”出发来分析、归纳直线与平面垂直的定义．
2. 从直线与直线垂直、直线与平面平行等的定义过程得到启发，能否用一条直线垂直于一个平面内的直线，来定义这条直线与这个平面垂直呢？	引导学生用“平面化”的思想来思考问题．	教师通过提问的方式引导学生讨论，再给出定义．
3. 给出定义，以及相关的概念．		
4. 虽然可以根据定义判定直线与平面垂直但这种方法实际上难以实施．有没有比较方便可行的方法来判断直线和平面的垂直呢？	通过操作确认，引导独立发现直线和平面垂直的条件．	在学生操作的过程中，教师可以提问：折痕 AD 与桌面 α 上的一条直线垂直，是否足以保证 AD 垂直桌面 α？由折痕 $AD\perp BC$，翻折之后这一垂直关系是一个不变关系，即有 $AD\perp CD$，$AD\perp BD$．你能得到什么结论呢？ 容易发现：当且仅当折痕 AD 是 BC 边上的高时，这样翻折之后竖起的折痕 AD 才不偏不倚地站立着，即 AD 与桌面 α 垂直．其他位置都不能使 AD 与桌面 α 垂直．
5. 根据上面的试验，结合两条相交直线确定一个平面的事实，你能给出直线与平面垂直的判定方法吗？	引导学生根据直观感知以及已有经验，进行合情推理，获得判定定理．	教师引导学生回忆出“两条相交直线确定一个平面”，以及直观过程中获得的感知，将“与平面内所有直线垂直”逐步归结到“与平面内两条相交直线垂直”，进而归纳得出： **一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直．**

问　题	设计意图	师生活动
6. 例 1 的教学．	初步运用直线与平面垂直的判定定理解决问题.	教师引导学生分析题意，要让学生思考："如果这两点都和旗杆脚距 6 米，则旗杆就和地面垂直．"的道理在哪里，这个条件为什么能保证旗杆与地面垂直?
7. 例 2 的教学.	应用判定定理解决数学内部的问题.	教师引导学生将思路集中在如何在平面 α 内找到两条与直线 b 垂直的相交直线上．另外，再引导学生将已知条件具体化的过程中，逐步明确根据异面直线所成角的概念解决问题.
8. 小结：（1）请归纳一下获得直线与平面垂直的判定定理的基本过程. （2）直线与平面垂直的判定定理，体现的数学思想方法是什么？		

五、习题解答

练习（第 73 页）

B.

练习（第 75 页）

1.（1）×；（2）√；（3）√.

2. $b/\!/\alpha$ 或 $b\subset\alpha$.

练习（第 77 页）

1. A.

2. B.

习题 2.3　A 组

1.（1）命题不正确．平面 α 与平面 β 可能相交但不垂直，也可能平行.

（2）命题正确．$\left.\begin{array}{l}a\perp\beta\\ a/\!/a_1\end{array}\right\}\Rightarrow a_1\perp\beta$，又 $\beta/\!/\beta_1\Rightarrow a_1\perp\beta_1$.

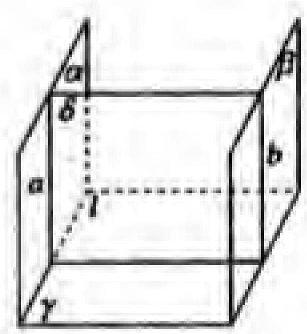
2. 证明：如图，设 $\alpha\cap\gamma=l$，在平面 α 内作直线 $a\perp l$.

因为 $\alpha\perp\gamma$，所以 $a\perp\gamma$.

过 a 作一个平面 δ 与平面 β 相交于直线 b，

由 $a/\!/\beta$，得 $a/\!/b$.

又 $b\subset\beta$，所以 $\beta\perp\gamma$．因为 $a\perp\gamma$，所以 $b\perp\gamma$.



（第 2 题）

3. 垂直.

4. $\left.\begin{array}{l}VA\perp AB\\ VA\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow VA\perp$ 平面 $ABC\Rightarrow\left.\begin{array}{l}VA\perp BC\\ AB\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp$ 平面 $VAB\Rightarrow$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VBC.

4. 提示：取 AB 中点 M，连接 VM，CM．由已知条件可得，$VM=1$，$CM=1$，所以，三角形 VMC 为等边三角形．因此，可得二面角 $V\text{-}AB\text{-}C$ 的平面角等于 60°.

5. 提示：在平面 γ 内做两条相交直线分别垂直于平面 α，β 与平面 γ 的交线，再利用面面垂直的性质定理证直线 $l\perp$ 平面 γ.

6. 提示：设 a，b，c 为两两互相垂直的直线，a，b 确定一平面 α，a，c 确定一平面 β.

$$\left.\begin{array}{r} c\perp a \\ c\perp b \\ a,\ b\text{是}\alpha\text{内两条相交直线} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c\perp\alpha \\ c\subset\beta \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\perp\beta.$$

同理可证，b，c 确定的平面与平面 α 垂直.

7. $90°$或 $45°$.

8. 提示：m，n 确定一平面 α，由已知可证：$l_1\perp\alpha$，$l_2\perp\alpha$，所以 $l_1/\!/l_2$，因此$\angle 1=\angle 2$.

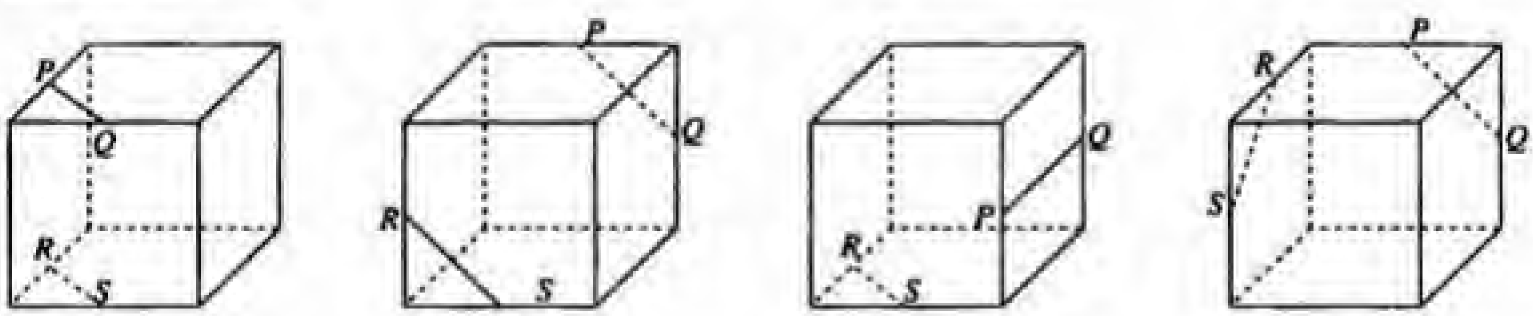
B 组

1. 提示：先证 $AC'\perp$平面 $A'BD$.
2. 提示：由已知条件知：$VD\perp AB$，$VO\perp AB$，所以，$AB\perp$平面 VDC，$AB\perp CD$.
   又因为 $AD=BD$，可得 $AC=BC$.
3. 提示：参考 A 组第 5 题的解法.
4. 解：由 VC 垂直于$\odot O$ 所在平面，知 $VC\perp AC$，$VC\perp BC$，即$\angle ACB$ 是二面角 A-VC-B 的平面角．由$\angle ACB$ 是直径上的圆周角，知$\angle ACB=90°$. 因此，平面 $VAC\perp$平面 VBC. 由 DE 是$\triangle VAC$ 两边中点连线，知 $EG/\!/AC$，故 $DE\perp VC$. 由两个平面垂直的性质定理，知直线 DE 与平面 VBC 垂直．

四 自我检测题

一、选择题.

1. 如图，点 P，Q，R，S 分别在正方体的四条棱上，并且是所在棱的中点，则直线 PQ 与 RS 是异面直线的图是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 有三个命题：

① 垂直于同一个平面的两条直线平行；

② 过平面 α 的一条斜线 l 有且仅有一个平面与 α 垂直；

③ 异面直线 a，b 不垂直，那么过 a 的任一个平面与 b 都不垂直.

其中正确命题的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. a，b 是异面直线，下面四个命题：

①过 a 至少有一个平面平行于 b　　②过 a 至少有一个平面垂直于 b

③至多有一条直线与 a，b 都垂直　　④至少有一个平面分别与 a，b 都平行

其中正确命题的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 下列命题中，正确的是（　　）

A. 一个平面把空间分成两部分　　B. 两个平面把空间分成三部分

C. 三个平面把空间分成四部分　　D. 四个平面把空间分成五部分

5. 三个平面把空间分成 7 部分时，它们的交线有（　　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 1 或 2 条

二、填空题.

6. 若点 M 在直线 a 上，a 在平面 α 上，则 M，a，α 间的关系可用集合语言表示为________.

7. 设 a，b，c 是空间的三条直线，下面给出四个命题：

① 若 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a/\!/c$；

② 若 a，b 是异面直线，b，c 是异面直线，则 a，c 也是异面直线；

③ 若 a 和 b 相交，b 和 c 相交，则 a 和 c 也相交；

④ 若 a 和 b 共面，b 和 c 共面，则 a 和 c 也共面.

其中真命题的个数是________

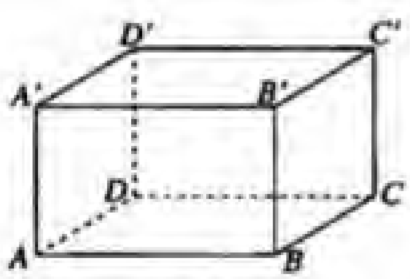
三、解答题.

8.（1）用符号语言表示语句："直线 l 经过平面 α 内一定点 P，但 l 在 α 外"，并画出图形.

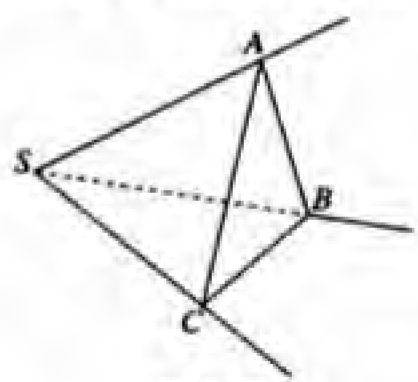
（2）把下面的符号语言改写成文字语言的形式，并画出图形.

若直线 $a\subset$平面 α，$A\in\alpha$，$A\notin a$，$A\in$直线 b，$a/\!/b$，则 $b\subset\alpha$.

9. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，指出 $B'C$，$D'B$ 所在直线与各个面所在平面的关系.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，过点 S 引三条不共面的直线 SA，SB，SC，其中$\angle BSC=90^\circ$，$\angle ASC=\angle ASB=60^\circ$，且 $SA=SB=SC=a$.

求证：平面 $ABC\perp$平面 BSC.

自我检测题参考解答及说明

一、选择题.

题号	1	2	3	4	5
答案	C	D	C	B	D

1. 本题考查的目的有两个：① 异面直线的概念；② 识图能力，空间想象能力.

2. 本题主要考查线面垂直的知识和异面直线的概念，有一定的综合性.

3. 本题通过平面或一条直线与异面直线关系这一背景，考查学生的空间想象能力.

4，5 两题考查的是平面划分空间的问题.

二、填空题.

说明：两道题的目的是考查学生是否建立了图形、文字、符号这三种数学语言的联系.

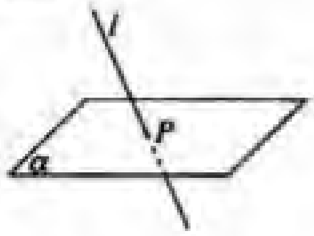
6. $M\in a$，$a\subset\alpha$；　　7. 0个.

三、解答题.

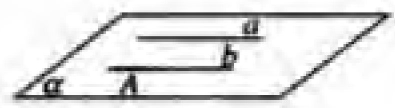
8. [redacted] 本题重点考查学生的“图形－文字－符号”的转化能力.

解：(1) $P\in\alpha$，$P\in l$，$l\not\subset$平面α，如图.

(2) 如果一条直线在一个平面内，那么经过这个平面内不在这条直线上的点与这条直线平行的直线也在这个平面内，如图.



(第8 (1) 题)



(第8 (2) 题)

9. 考查学生的空间的想象能力.

解：$B'C$ 所在直线与各个面所在平面的关系是：直线 $B'C$//面 $A'D'DA$；

$B'C$ 与面 $A'B'C'D'$、面 $ABCD$、面 $A'B'BA$、面 $C'D'DC$ 都相交；

$B'C\subset$面 $B'C'CB$；　　$D'B$ 与各个面都相交.

10. 本题考查学生的推理论证能力.

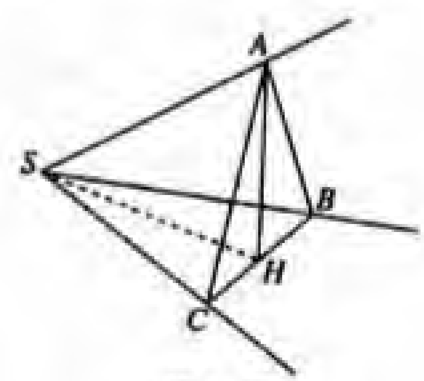
证明：因为 $SA=SB=SC=a$，又$\angle ASC=\angle ASB=60^\circ$，

所以，$\triangle ASB$ 和$\triangle ASC$ 都是等边三角形，$AB=AC=a$. 取 BC 的中点 H，连接 AH，所以，$AH\perp BC$.

在 Rt$\triangle BSC$ 中，$BS=CS=a$，所以，$SH\perp BC$，$BC=\sqrt{2}a$，

所以，$AH^2=AC^2-CH^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{a^2}{2}$，$SH^2=\frac{a^2}{2}$. 在$\triangle SHA$ 中，$AH^2=\frac{a^2}{2}$，$SH^2=\frac{a^2}{2}$，$SA^2=a^2$，故有 $SA^2=SH^2+AH^2$，所以 $AH\perp SH$. 因此 $AH\perp$平面 SBC.

因为 $AH\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 BSC.



(第10题)

第三章 直线与方程

Ⅰ 总体设计

解析几何是17世纪数学发展的重大成果之一，其本质是用代数方法研究图形的几何性质，体现了数形结合的重要数学思想．在本章中，学生主要学习在平面直角坐标系中建立直线的代数方程，运用代数方法研究直线、直线之间的位置关系、两条直线的交点坐标、点到直线的距离，以及与此相关的一些应用．初步形成用代数方法解决几何问题的能力，体会数形结合的思想．

一、课程与学习目标

在本章教学中，教师应帮助学生经历如下的过程：首先将直线的倾斜角代数化，探索确定直线位置的几何要素，把直线问题转化为代数问题；处理代数问题；分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题．这种思想应贯穿本章教学的始终，帮助学生不断地体会“数形结合”的思想方法．

（1）在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素．

（2）理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式．

（3）能根据斜率判定两条直线平行或垂直．

（4）根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式)，体会斜截式与一次函数的关系．

（5）能用解方程组的方法求两直线的交点坐标．

（6）探索并掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离．

二、内容安排

1. 本章知识结构

从几何直观到代数表示

(建立直线的方程)

点 ↔ 坐标

倾斜角 ↔ 斜率

↓

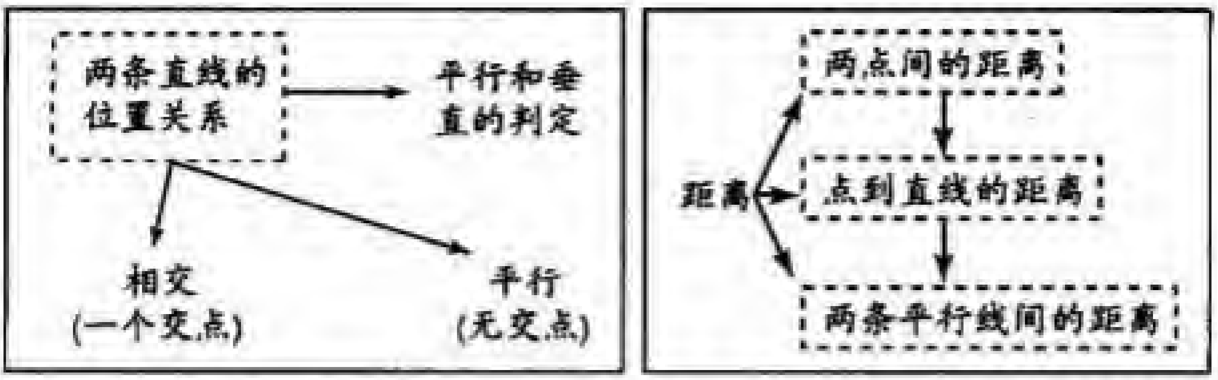
直线 ↔ 二元一次方程

点斜式 → 一般式

两点式 → 一般式

从代数表示到几何直观

(通过方程研究几何性质和度量)



2. 内容安排说明

直线与方程是平面解析几何初步的第一章，用坐标法研究平面上最简单的图形——直线．

本章首先在平面直角坐标系中，介绍直线的倾斜角、斜率等概念；然后建立直线的方程：点斜式、斜截式、两点式、截距式等；通过直线的方程，研究直线间的位置关系：平行和垂直，以及两条直线的交点坐标、点到直线的距离公式等．

解析几何研究问题的主要方法是坐标法，它是解析几何中最基本的研究方法．坐标法的基本特点是，首先用代数语言（坐标及其方程）描述几何元素及其关系，将几何问题代数化；解决代数问题，得到结果；分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题．

本章自始至终贯穿数形结合的思想．在图形的研究过程中，注意代数方法的使用；在代数方法的使用过程中，加强与图形的联系．

三、课时分配

本章教学时间约 9 课时，具体分配如下（仅供参考）：

3.1　直线的倾斜角与斜率	约 2 课时
3.2　直线的方程	约 3 课时
3.3　直线的交点坐标与距离公式	约 3 课时
小　结	约 1 课时

III 教科书分析

直角坐标系使几何研究又一次飞跃，几何从此跨入了一个新的时代．在欧氏几何里，我们直接依据图形中点、直线、平面的关系，研究图形的性质．现在我们采用另外一种研究方法：坐标法．坐标法是在坐标系的基础上，把几何问题转化为代数问题，通过代数运算研究几何图形性质的一种方法．

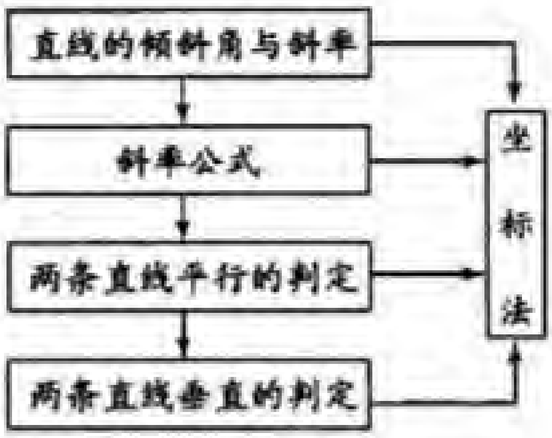
本章首先在平面直角坐标系中，给直线插上方程的“翅膀”，然后通过直线的方程研究直线之间的位置关系：平行、垂直，以及两条直线的交点坐标、点到直线的距离公式等等．

解析几何是 17 世纪法国数学家笛卡儿和费马共同创立的．解析几何的创立是数学发展史上的一个里程碑，数学从此由常量数学进入变量数学时期．解析几何由此成为近代数学的基础之一．

3.1 直线的倾斜角与斜率

一、本节知识结构

本节分为两个小节，由四部分组成：倾斜角与斜率、斜率公式、两条直线平行的判定、两条直线垂直的判定．知识结构如下图所示．



二、教学重点与难点

1. 教学重点

（1）斜率的概念，用代数方法刻画直线斜率的过程，过两点的直线斜率的计算公式．

（2）根据斜率判定两条直线平行或垂直．

2. 教学难点

直线的斜率与它的倾斜角之间的关系，根据斜率判定两条直线互相垂直．

三、教科书编写意图与教学建议

3.1.1 倾斜角与斜率

1. 在义务教育阶段，学生学习过函数的图象，知道在直角坐标系中，点可以用有序实数对(x, y)表示，但没有系统接受过解析几何研究问题的思想方法．因此可以简要说明，从本章起，我们研究什么？怎样研究？

在欧氏几何中，所用的研究方法是以公理为基础，直接依据图形中点、直线、平面的关系研究图形的性质．在平面解析几何中，所用的研究方法与欧氏几何不同，它是在直角坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线(包括直线)，通过方程研究曲线的性质，通过方程组的解研究几何图形之间的位置关系．因此，可以说，解析几何是用代数方法研究几何问题的一门学科．

由于代数方法的主要特点是“算”，当几何问题代数化之后，可以用计算机处理代数问题，通过代数问题的处理研究几何图形的性质，从而实现机器证明．我国数学家吴文俊在这方面有突出的贡献．

平面解析几何研究的主要问题是：

(1) 根据已知条件，求出表示平面曲线(包括直线)的方程；

(2) 通过方程研究平面曲线(包括直线)的性质.

17 世纪，法国数学家笛卡儿和费马创立了解析几何. 解析几何的产生对数学发展，特别是对微积分的出现起了促进作用. 恩格斯曾给予高度评价："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了." 教科书在"阅读与思考笛卡儿与解析几何"中详细介绍了法国数学家笛卡儿以及他对解析几何诞生所做出的重大贡献.

用坐标法研究几何问题时，我们首先研究最简单的几何对象——直线，学习直线的倾斜角与斜率.

2. 倾斜角与斜率是研究直线的倾斜程度时产生的. 为了刻画直线的倾斜程度，我们首先引入倾斜角的概念.

在学习倾斜角之前，教科书提出思考问题："对于平面直角坐标系内的一条直线 l，它的位置由哪些因素确定呢?"

在平面直角坐标系中，结合具体图形，学生容易了解确定直线位置的几何要素可以是一个点与直线的方向. 两个点当然可以确定一条直线，两个点可以确定直线的方向，这与"一个点和直线的方向确定一条直线"是一致的.

给出一点 P，可以作无数条直线，这些直线组成"直线束"(图 3-1). 这些直线的共同点是都经过点 P，不同点是它们的倾斜程度不同. 要确定直线束中某一条直线还需要给出一个角，由此说明引入倾斜角的必要性.

3. 在坐标系中讨论角，常常以 x 轴为基准. 当直线 l 与 x 轴相交时，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.

当直线与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 0°.

4. 引导学生通过讨论倾斜角的范围，刻画直角坐标系中直线的倾斜程度，使学生自觉感受直线的倾斜角 α 的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$. 这样做，使学生感受数学是自然的，并不是强加于我们的.

这样讨论的另一个作用是使学生感受平面直角坐标系中每一条直线都有确定的倾斜角 α. 而且倾斜程度不同的直线有不同的倾斜角，倾斜程度相同的直线有相同的倾斜角.

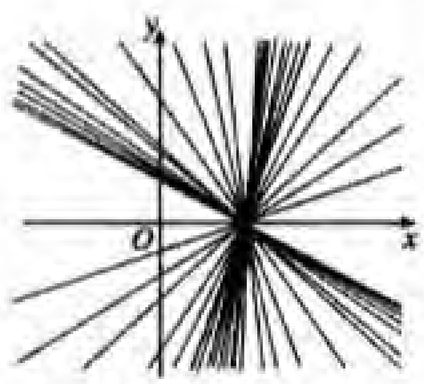


图 3-1

5. 倾斜角相同的直线是一组平行线. 只知道直线的倾斜角不能确定一条直线，还需要一个点，即直线上的一点和直线的倾斜角唯一确定一条直线. 因此确定一条直线的几何要素是，直线上的一个定点以及它的倾斜角，二者缺一不可.

6. 讨论了直线的倾斜角之后，教科书提出了一个思考问题"日常生活中，还有没有表示倾斜程度的量?"

日常生活中讨论斜面问题时，经常涉及"坡度"这一概念. 引导学生把坡度这个同样用来刻画直线倾斜程度的量与倾斜角联系起来，从而引入"斜率"这一概念.

7. 教科书把一条直线的倾斜角的正切值称为直线的斜率. 给出斜率概念后，引导学生思考"倾斜角是 90°的直线有斜率吗?" 在 $k=\tan\alpha$ 中增加限制条件 $\alpha\neq 90°$，从而得到直线斜率的完整概念.

倾斜角不是 90°的直线，它的倾斜角的正切值叫做这条直线的斜率. 直线的斜率常用 k 表示，即

$$k=\tan\alpha\ (\alpha\neq 90°).$$

倾斜角是 90°的直线的斜率不存在. 而且，倾斜角相同的直线，其斜率相同；倾斜角不同的直线，其斜率不同. 因此，我们可以用斜率刻画直线的倾斜程度.

直线的倾斜角、斜率都是用来刻画直线倾斜程度的，它们本质上是一致的.

8. 为了深入研究直线的倾斜角与斜率的关系，教师可以提问：“斜率为正或负时，直线具有怎样的位置?”让学生思考、探究.

通过信息技术工具演示或者让学生亲自操作，让学生自己获得直线的倾斜角 α 与斜率 k 的关系. 如图 3-2，拖动点 P，改变直线的倾斜角 α，可以清楚地看到：

当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，即 α 是锐角时，直线的斜率是正数；

当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，即 α 是钝角时，直线的斜率是负数.

在缺乏信息技术工具演示的情况下，也可以借助科学计算器，让学生计算一些倾斜角的正切值，观察计算结果，得到结论.

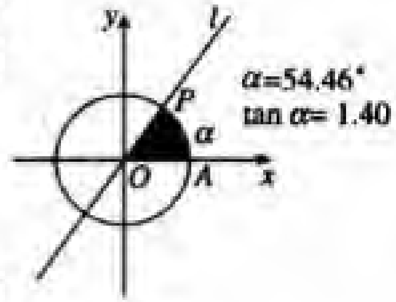


图 3-2

9. 两点确定一条直线. 给定两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，我们可以求直线 P_1P_2 的斜率 k.

如图 3-3，借助信息技术工具，一方面计算 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的值，另一方面计算倾斜角的正切值. 改变直线的倾斜程度，我们发现 $\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$(在“几何画板”环境中，可以直接度量直线的斜率，同时计算 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的值).

如图 3-3，(1) 改变直线 l 的倾斜角 α，不论 α 是锐角还是钝角，可以清楚地显示，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的值与斜率 k 总相等；

(2) 当直线 l 的倾斜角 α 确定后，k 的值与点 P_1，P_2 的顺序无关.

动态演示可以把教科书第 88 页图 3.1-4 所示的各种情况都展示出来，形象直观，可以更好地把握斜率公式. 如果让学生亲自操作，学生会得到更好地体验.

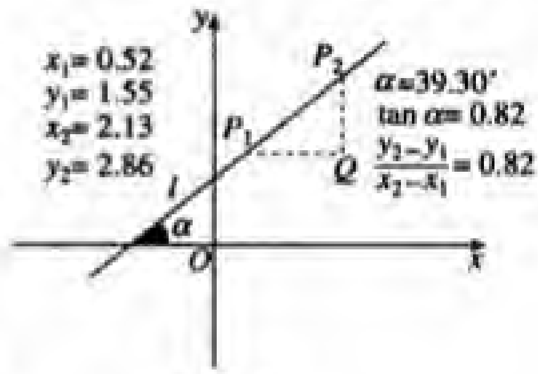


图 3-3

10. 在上述演示下，我们可以解决教科书第 89 页提出的几个问题：

(1) 当直线 P_1P_2 与 x 轴平行或重合时，上述公式还成立吗? 为什么?

答：成立，因为分子为 0，分母不为 0.

(2) 已知直线上两点 $A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$，运用上述公式计算直线 AB 的斜率时，与 A，B 两点坐标的顺序有关吗?

答：与 A，B 两点坐标的顺序无关.

(3) 当直线平行于 y 轴，或与 y 轴重合时，上述公式还适用吗? 为什么?

答：不适用，因为分母为 0.

11. 对于教科书第 89 页的例 1，直接利用求斜率的公式，就可以：(1)计算出直线的斜率；(2)由直线的斜率判断倾斜角是锐角还是钝角.

12. 教科书第 90 页的例 2 要求学生画图，目的是加强数形结合. 因为直线经过原点，只要再找出另外一点就可确定. 在推导斜率公式时，学生已经知道，斜率 k 的值与直线上 P_1，P_2 的位置无关. 因此，由已知直线的斜率画直线时，可以再找一个特殊点，使其横坐标等于 1，比较方便. 比如画经过原点，斜率是 -3 的直线，只要再找一点$(1, -3)$就可以了.

3.1.2 两条直线平行与垂直的判定

1. 对于两条直线平行的判断，学生不会感到困难. 通过斜率相等判断两条直线平行，是通过代数关系得到几何结论，体现了用代数方法研究几何问题的思想.

由 $k_1=k_2$，可得直线 l_1 与 l_2 的倾斜角相等，这样就把代数关系转化为几何关系. 根据平面几何知识，两条直线被第三条直线所截，同位角相等，两直线平行. 从而判定直线 l_1 与 l_2 平行.

需要注意的是，教科书得到结论

$$\boxed{l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.}$$

的前提条件是“设两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2”即在两条直线的斜率都存在的条件下研究问题. 此时，可以通过提问“两条直线平行，它们的斜率相等吗?”引起学生的注意，让学生不要忽视前提条件.

2. 当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，有 $k_1=k_2$. $l_1 \perp l_2$ 时，k_1 与 k_2 满足什么关系呢？教科书在第 92 页提出了上述思考问题.

如图 3-4，借助信息技术工具，可以让学生度量 l_1 与 l_2 的斜率，并使直线 l_1(或者 l_2)转动起来，但仍保持 $l_1 \perp l_2$，观察它们斜率之间的关系，得到猜想，然后给予验证，最后加以证明.

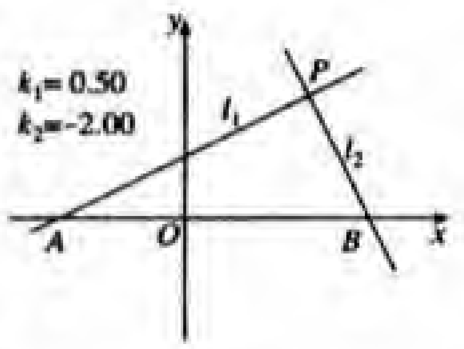


图 3-4

如果学生难以发现 $k_1k_2=-1$，可以先取直线斜率 k_1，k_2 的特殊值，比如当 $k_1=-2$ 时，$k_2=0.5$ 等等. 当学生得到猜想 $k_1k_2=-1$ 后，再改变直线 l_1(或者 l_2)的位置，但保持垂直关系不变，验证猜想. 拖动时，注意使直线 l_1(或者 l_2)的倾斜角为锐角、钝角等各种情况等等.

教科书利用“三角形任一外角等于其不相邻两内角之和”得到$\alpha_2=90°+\alpha_1$，并利用 $\tan(90°+\alpha)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$导出结论“当 $l_1 \perp l_2$ 时，$k_1k_2=-1$.”

3. 当 $k_1k_2=-1$ 时，探究 l_1 与 l_2 的位置关系，学生不会感到困难. 这里再次体现了解析几何的思想方法——通过代数关系获得几何结论.

4. 因为学生没有系统地学习过三角函数，并不了解公式 $\tan(90°+\alpha)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$. 这里可以利用科学计算器，通过计算验证，让学生了解这一关系.

5. 同样需要注意的是，结论

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1}$$

成立的前提条件是两条直线都有斜率，并且都不等于零.

教学中，可以提出“两条直线互相垂直，它们的斜率之积等于-1吗？为什么?”以引起学生注意. 另外还可以通过符号语言与文字语言之间的转换来引起注意，要求学生用文字语言叙述

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$$

的意义.

6. 本小节一共设置了 4 个例题.

教科书第 92 页的例 3 与例 4 学生不会感到困难. 学生画出图形后，可以猜想直线间具有平行关系，然后用两条直线的斜率相等进行判定.

第 93 页例 5、例 6 都是应用结论“$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$”. 可以类比例 3、例 4 进行教学.

对于例 6，结合图形，猜想△ABC 是直角三角形．既然如此，就可以利用勾股定理来证明，但是学生还没有学习直角坐标系中两点间距离公式，要在第 3.3.2 节才学习．可以作为学生课后研究的问题，课堂上不必展开．

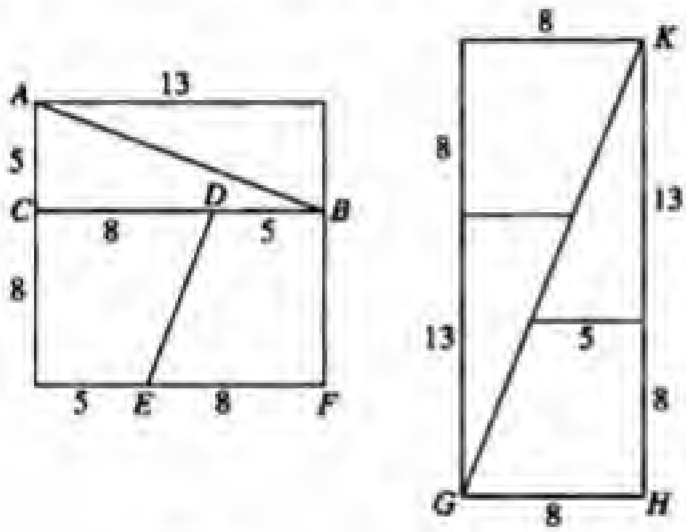
探究与发现　魔术师的地毯

这是一个似乎令人费解的问题：魔术师真的能把长、宽都是 13 dm 的地毯改成长 21 dm，宽为 8 dm的地毯吗？面积减少了 1 dm²，当然是不可能的．

如图 3-5（1），在△ACB 中，$\tan\angle CAB=\frac{13}{5}$，而 $\tan\angle DEF=\frac{8}{8-5}=\frac{8}{3}$．

把△ABC 剪开，旋转 90°，再使 A 与 D 重合，C 与 B 重合，即线段 AC 与线段 DB 合并，由于$\frac{13}{5}\neq\frac{8}{3}$，即直线的斜率不相等，此时三点 E、$D(C)$、B 并不在一条直线上，因此不能构成图 3-5(2)的一条线段 GK．

准确的图形如图 3-6 所示．自 G 到 K 中间有一个细长的重叠地带，这个重叠部分是面积减少的原因．地毯比较松软，尺寸不是十分精确，如果选择钢板，这个魔术就做不成了．



(1)　　(2)

图 3-5

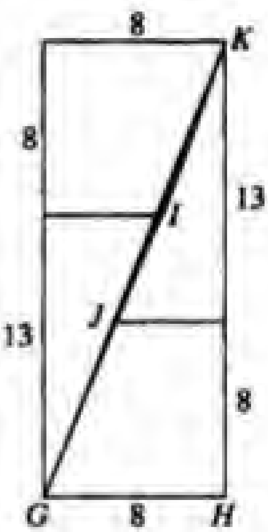


图 3-6

另外，这个问题还与著名的斐波拉契(Fibanacci)数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

有关，这个数列的递推公式是

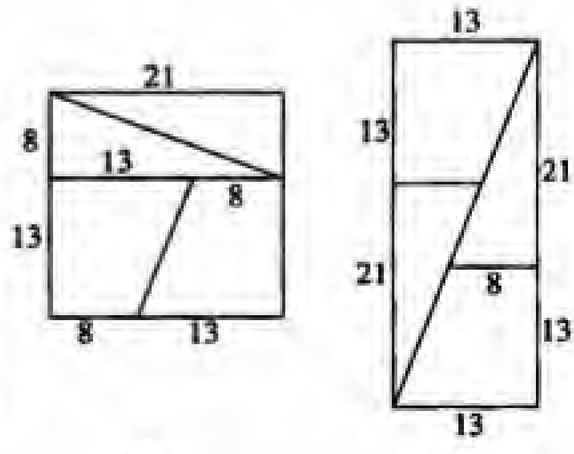
$$a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n.$$

它有一个性质，就是 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}+(-1)^n$．

当 $n=6$ 时，$a_6=8$，$a_7=13$，$a_8=21$，$13^2=8\times21+(-1)^5$．

当 $n=7$ 时，$a_7=13$，$a_8=21$，$a_9=34$，$21^2=13\times34-1$．

如图 3-7(1)，把正方形地毯的边长改为 21 dm，并且按图所示的线条分块，然后再拼接成图 3-7(2)的情形，这样面积多了 1 dm²．因此，可以向学生提出类似的问题：你能改变正方形地毯的边长，设置类似的问题，使得面积增加 1 dm² 吗？



(1)　　(2)

图 3-7

四、补充例题

(1) 已知直线 l 的倾斜角是 α，且 $45^\circ\leqslant\alpha\leqslant135^\circ$，求直线 l 的斜率 k 的范围.

(2) 已知直线 l 的斜率为 k，且 $0\leqslant k\leqslant1$，求直线 l 的倾斜角 α 的范围.

解：(1) 当 $\alpha=90^\circ$ 时，直线 l 的斜率不存在.

当 $45^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$ 时，k 是正数，且 $k=\tan\alpha\geqslant\tan45^\circ=1$；

当 $90^\circ<\alpha\leqslant135^\circ$ 时，k 是负数，且 $k=\tan\alpha\leqslant\tan135^\circ=-1$.

所以，直线 l 的斜率 k 的范围是 $k\geqslant1$ 或 $k\leqslant-1$.

(2) 已知直线 l 的斜率为 k，且 $0\leqslant k\leqslant1$，由 $k=\tan\alpha$ 可以得到直线 l 的倾斜角 α 的范围是

$$0^\circ\leqslant\alpha\leqslant45^\circ.$$

五、习题解答

练习（第 91 页）

1. 解：(1) $k=\tan30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) $k=\tan45^\circ=1$；

(3) $k=\tan120^\circ=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$；

(4) $k=\tan135^\circ=-\tan45^\circ-1$.

2. 解：(1) $k_{CD}=\dfrac{6}{7}$，因为 $k_{CD}>0$，所以直线 CD 的倾斜角是锐角；

(2) $k_{PQ}=-\sqrt{3}$，因为 $k_{PQ}<0$，所以直线 PQ 的倾斜角是钝角.

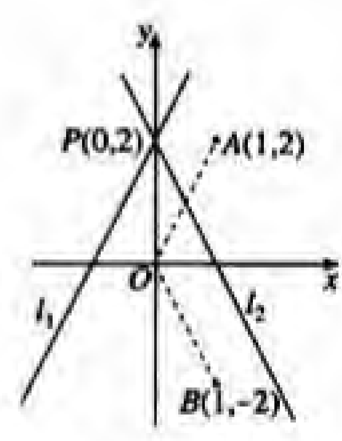
3. 解：(1) 因为 $k_{AB}=0$，所以 $\tan\alpha=0$，因此，直线 AB 的倾斜角是 0°；

(2) 因为过 C，D 两点的直线垂直 x 轴，所以直线 CD 的倾斜角是 90°；

(3) 因为 $k_{PQ}=1$，所以 $\tan\alpha=1$，因此，直线 PQ 的倾斜角是 45°.

4. 解：如图，画点 $A(1,\ 2)$，连结 OA；画点 $P(0,\ 2)$，过点 P 作 OA 的平行线 l_1. 直线 l_1 就是经过点 $(0,\ 2)$，斜率为 2 的直线.

同样，画点 $B(1,\ -2)$，连结 OB；过点 P 作 OB 的平行线 l_2. 直线 l_2 就是经过 $(0,\ 2)$，斜率为 -2 的直线.



（第 4 题）

练习（第 94 页）

1. 解：(1) 因为 $k_1=1$，$k_2=1$，所以 $k_1=k_2$，因此，直线 l_1 与直线 l_2 互相平行；

(2) 因为 $k_3=\dfrac{1}{5}$，$k_4=-5$，所以 $k_3k_4=-1$，因此，直线 l_3 与 l_4 互相垂直.

2. 解：经过 A，B 的直线的斜率 $k_{AB}=\dfrac{1-m}{m+1}$，经过 P，Q 的直线的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{1}{3}$.

(1) 由 $AB/\!/PQ$ 得 $\dfrac{1-m}{m+1}=\dfrac{1}{3}$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

所以，当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时，直线 AB 与 PQ 互相平行；

(2) 由 $AB\perp PQ$ 得 $\dfrac{1-m}{m+1}\times\dfrac{1}{3}=-1$，解得 $m=-2$.

所以，当 $m=-2$ 时，直线 AB 与 PQ 互相垂直.

习题 3.1　A 组

1. 解：由 $|k|=1$，得

$k=1$ 时，倾斜角是 45°；$k=-1$ 时，倾斜角是 135°.

2. 解：由已知，得

AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=4$；

BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=\frac{1}{2}$；

CD 边所在直线的斜率 $k_{CD}=-4$；

DA 边所在直线的斜率 $k_{DA}=\frac{1}{4}$.

3. 解：由已知，得

$$k_{AB}=\frac{2}{x-3};$$

$$k_{AC}=\frac{y-5}{-4}.$$

因为 A，B，C 三点都在斜率为 2 的直线上，所以

$$\frac{2}{x-3}=2,\ \frac{y-5}{-4}=2.$$

解得 $x=4$，$y=-3$.

4. 解：(1) 经过 A，B 两点直线的斜率

$$k=\frac{3m-6}{1+m}.$$

由题意，得　$\frac{3m-6}{1+m}=12$.

解得　$m=-2$.

(2) 经过 A，B 两点直线的斜率

$$k=\frac{2m+3}{2m}.$$

由直线 AB 的倾斜角是 60°知，斜率 $k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，所以$\frac{2m+3}{2m}=\sqrt{3}$.

解得　$m=\frac{3+3\sqrt{3}}{4}$.

5. 解：经过 A，B 两点直线的斜率

$$k_{AB}=1.$$

经过 A，C 两点的直线的斜率

$$k_{AC}=1.$$

所以 A，B，C 三点在同一条直线上.

6. 解：(1) 由题意，直线 AB 的斜率 $k_2=\frac{8-2}{4-1}=2$，

又因为直线 l_1 的斜率为 2，所以 $k_1=k_2$，因此直线 $l_1 /\!/ l_2$；

(2) 因为 l_1 经过点 $P(3,3)$，$Q(-5,3)$，它们的纵坐标相同，所以直线 PQ 平行于 x 轴．又 l_2 平行于 x 轴，且不经过 P，Q 两点，所以直线 $l_1 /\!/ l_2$；

(3) 由已知得直线 l_1 的斜率

$$k_1=\frac{1}{2},$$

直线 l_2 的斜率

$$k_2=\frac{1}{2}.$$

因为 $k_1=k_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

7. 解：(1) 由已知得直线 l_2 的斜率

$$k_2=\frac{3}{2}.$$

又直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{2}{3}$，因为

$$k_1k_2=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1,$$

所以 $l_1\perp l_2$.

(2) 由已知得直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{-1-(-6)}{-2-3}=-1$.

又直线 l_1 的倾斜角是 $45°$，所以直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan 45°=1$.

因为 $k_1k_2=(-1)\times1=-1$，所以 $l_1\perp l_2$.

(3) 由已知得直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{5}{3}$，

直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{3}{5}$，

因为 $k_1k_2=-\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$.

8. 解：设点 D 的坐标为 (x, y)，由已知得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=3$；

直线 CD 的斜率 $k_{CD}=\frac{y}{x-3}$；

直线 CB 的斜率 $k_{CB}=-2$；

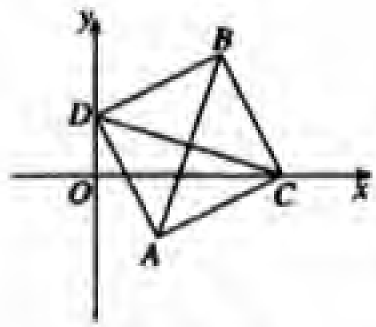
直线 AD 的斜率 $k_{AD}=\frac{y+1}{x-1}$.

由 $CD\perp AB$，且 $CB /\!/ AD$，得

$$\begin{cases}\frac{y}{x-3}\times3=-1,\\ \frac{y+1}{x-1}=-2.\end{cases}$$

解得 $x=0$，$y=1$.

所以，点 D 的坐标是 $(0, 1)$.



(第 8 题)

B 组

1. 解：因为点 P 在 x 轴上，所以设点 P 的坐标为 $(x, 0)$.

直线 PM 的斜率 $k_{PM}=\frac{-2}{x-2}$；

直线 PN 的斜率 $k_{PN}=\frac{2}{x-5}$.

因为 $\angle MPN$ 是直角，所以有 $PM\perp PN$，$k_{PM}\cdot k_{PN}=-1$，即

$$\frac{-2}{x-2}\times\frac{2}{x-5}=-1.$$

解得　$x=1$，或 $x=6$.

所以，点 P 的坐标是(1, 0)、或(6, 0).

2. 解：由已知得直线 l_1 的斜率 $k_1=\frac{-3}{m+3}$；

直线 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{1}{2}$.

(1) 若 $l_1 /\!/ l_2$，则$\frac{-3}{m+3}=-\frac{1}{2}$，

解得 $m=3$.

(2) 若 $l_1\perp l_2$，则$\frac{-3}{m+3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，

解得 $m=-\frac{9}{2}$.

3. 解：由已知得

AB 边所在的直线的斜率 $k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

BC 边所在的直线的斜率 $k_{BC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

CD 边所在的直线的斜率 $k_{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

DA 边所在的直线的斜率 $k_{DA}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法一：因为 $k_{AB}\cdot k_{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$，所以 $AB\perp BC$；

同理，$BC\perp CD$，$CD\perp DA$.

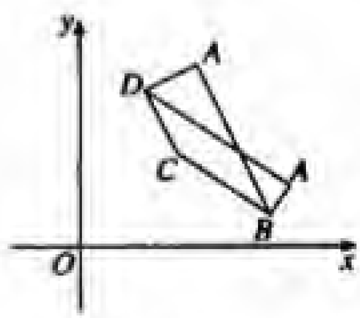
因此四边形 $ABCD$ 是矩形.

方法二：因为 $k_{AB}\cdot k_{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$，所以 $AB\perp BC$；

又因为 $k_{BC}=k_{DA}$，所以 $BC /\!/ DA$. 同理，$AB /\!/ CD$.

因此四边形 $ABCD$ 是矩形.

4. 解：如图，符合条件的四边形有两个.



(第 4 题)

由已知得直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{3-1}{3-6}=-\frac{2}{3}$，

直线 CD 的斜率 $k_{CD}=-2$，

直线 AD 的斜率 $k_{AD}=\frac{m-5}{n-2}$，

直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{m-1}{n-6}$.

(1) 当 $AD\perp DC$，$AB /\!/ CD$ 时，

$$k_{AD}\cdot k_{CD}=-1，即\ \frac{n-5}{m-2}\times(-2)=-1， \quad ①$$

$$k_{AB}=k_{CD}，即\ \frac{n-1}{m-6}=-2. \quad ②$$

由①、②得 $m=\frac{18}{5}$，$n=\frac{29}{5}$.

所求，点 A 的坐标为$\left(\frac{18}{5}, \frac{29}{5}\right)$.

(2) 当 $BC\perp AB$，$AD/\!/BC$ 时，

$$k_{BC}\cdot k_{AB}=-1，即 \quad \frac{n-1}{m-6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1， \qquad ③$$

$$k_{AD}=k_{BC}，即 \quad \frac{n-5}{m-2}=-\frac{2}{3}. \qquad ④$$

由③、④得 $m=\frac{86}{13}$，$n=\frac{25}{13}$.

所以，点 A 的坐标为 $\left(\frac{86}{13}, \frac{25}{13}\right)$.

综上，$m=\frac{18}{5}$，$n=\frac{29}{5}$；或 $m=\frac{86}{13}$，$n=\frac{25}{13}$.

5. 解：直线 l 的斜率 $k=\frac{m^2-3-2m}{m^2+2-(3-m-m^2)}=\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}$，

由 $k=\tan 45^\circ=1$，得 $\quad \frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}=1$.

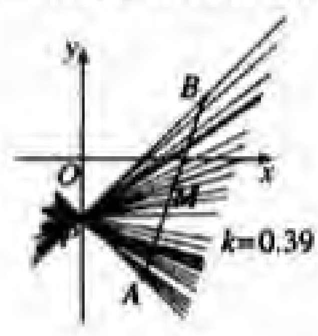
解得 $m=-1$，或 $m=-2$.

当 $m=-1$ 时，点 A 的坐标是 $(3, -2)$，点 B 的坐标是 $(3, -2)$，A，B 是同一个点，不符合条件.

当 $m=-2$ 时，点 A 的坐标是 $(6, 1)$，点 B 的坐标是 $(1, -4)$，符合条件.

所以，$m=-2$.

6. 解：用"几何画板"软件. 如图，在线段 AB 上画点 M，连接 AP. 度量 PM 的斜率 k，拖动点 M，观察 k 的取值范围，可见 $-1\leqslant k\leqslant 1$. 因此，倾斜角的范围是 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 45^\circ$，或 $135^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$.



(第 6 题)

3.2 直线的方程

一、本节知识结构

本节分为三个小节，由四部分组成：直线的点斜式方程、直线的斜截式方程、直线的两点式方程、直线的一般式方程. 结构如下图所示：

直线的点斜式方程
↓
直线的斜截式方程
↓
直线的两点式方程
↓
直线的一般式方程

二、教学重点与难点

教学重点是直线的点斜式方程、直线的一般式方程，教学难点是直线方程的应用.

3.2.1 直线的点斜式方程

1. 上节分析了在直角坐标系内确定一条直线的几何要素——直线上的一点和直线的倾斜角，其代数含义是这个点的坐标以及这条直线的斜率. 两点也能确定一条直线. 这一节我们建立直线的方程，通过方程研究直线.

给定点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k（或者两个点 P_1，P_2）后，直线就唯一确定了. 直线的方程，就是直线上任意一点的坐标 (x, y) 满足的关系式.

2. 本小节开始时首先提出问题：

直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k. 设点 $P(x, y)$ 是直线 l 上任意一点，试建立 x，y 与 k，x_0，y_0 之间的关系.

根据斜率公式，学生不难得到，当 $x\neq x_0$ 时，

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0}, \qquad ①$$

即

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0).} \qquad (1)$$

方程①不能表示直线 l 上的所有点，但是方程(1)能. 方程(1)称为直线的点斜式方程.

接着，教科书提出思考问题：

(1) 过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上的点，其坐标都满足方程(1)吗？

(2) 坐标满足方程(1)的点在过 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上吗？

由推导过程就可以知道，过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上的点，其坐标都满足方程(1). 经过验证，同样可以知道，坐标满足方程(1)的点都在过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 上. 只要求验证一下就可以了，不必严格地证明.

3. 方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 称为直线的"点斜式"方程. 点斜式，顾名思义，直线可以由一个点及它的斜率确定.

直线的点斜式方程能否表示坐标平面上的所有直线呢？这个问题先让学生讨论，然后再说明理由.

事实上，在讨论直线的斜率时，学生已经了解，不是所有的直线都有斜率. 直线的点斜式方程涉及直线的斜率，有斜率的直线才能写成点斜式方程. 凡是垂直于 x 轴的直线，其方程都不能用点斜式表示.

平行于 x 轴的直线可以用点斜式表示，此时直线的斜率为 0. 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，垂直于 x 轴的直线可以写成 $x=x_0$.

4. 直线的点斜式方程好象一个求直线方程的"公式"，以后求直线的方程就可以利用这个"公式"了. 因此，应该把直线的点斜式方程的教学作为本节的一个重点.

5. 直线的斜截式方程的教学可以从两方面入手.

一方面，提出问题：求经过点 $B(0, b)$，斜率为 k 的直线 l 的方程. 利用直线的点斜式方程，容易得到 $y=kx+b$.

另一方面，学生已经学习过一次函数，可以让学生回忆一次函数的定义及其图象. 函数 $y=kx+b$（其中 $k\neq 0$）称为一次函数，它的图象是一条直线，b 是直线与 y 轴交点的纵坐标，称为在 y 轴上的截距，k 是直线的斜率.

通过这两方面，让学生体会直线的斜截式方程与一次函数的关系.

教学上，这两方面无所谓谁先谁后．可以先复习一次函数及其图象，然后再对照学习过的直线的点斜式方程，找出它们的异同点．

6. 值得注意的是，学生容易把“截距”与“距离”混淆起来，误以为截距就是直线与坐标轴的交点与原点的距离．直线在 y 轴上的截距是直线与 y 轴交点的纵坐标．

为了使学生理解截距的概念，也可以提出问题：直线 l 在 x 轴上的截距是什么呢？

直线 l 在 x 轴上的截距是直线 l 与 x 轴交点的横坐标．这样可以从另一个侧面加深对直线在 y 轴上的截距的理解．

7. 与讨论直线的点斜式方程是否可以表示平面上所有的直线一样，学生不难知道，直线的斜截式方程不能表示垂直于 x 轴的直线．

8. 例 1 是直线点斜式方程的简单应用，例 2 给出直线的斜截式方程，结合判断两条直线相互平行，或者相互垂直的条件，有一定的综合性．这两个例题比较简单，学生不会感到困难．

3.2.2 直线的两点式方程

1. 上小节我们认真分析了经过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线方程的意义，建立了直线的点斜式方程．在这个基础上，建立其他形式的方程已经不再困难．比如在直线的点斜式方程的基础上，建立直线的斜截式方程就比较方便．

2. 直线的点斜式方程就好像一个求直线方程的“公式”，以后再求直线方程的其他形式就可以利用这个“公式”了．因此，在求直线的两点式方程时，要充分利用直线的点斜式方程．

教科书提出了一个问题：

已知两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$），如何求出通过这两点的直线方程呢？

学生利用已经学习过的知识，容易得到直线的两点式方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

3. 值得注意的是，两点式方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 中的条件 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$ 使得它既不能表示与 x 轴垂直的直线，也不能表示与 y 轴垂直的直线．与 x 轴垂直的直线，或者与 y 轴垂直的直线的方程的形式更为简单．教科书提出问题：若点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 中有 $x_1=x_2$，或 $y_1=y_2$，此时过两点的直线方程是什么？

显然，若 $x_1=x_2$，则经过 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线方程是 $x=x_1$；若 $y_1=y_2$，则经过 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线方程是 $y=y_1$；

4. 教科书在例 4 的解答过程中，补充了线段的中点坐标公式：

如图 3-8，若点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，线段 P_1P_2 的中点为 $M(x, y)$，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

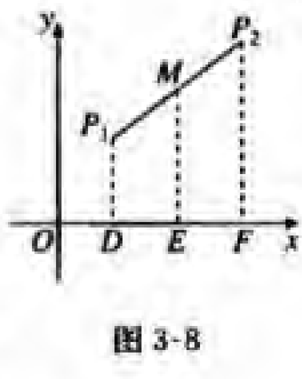


图 3-8

从中点坐标公式可以看出，中点的横坐标只与 P_1，P_2 的横坐标有关，纵坐标只与点 P_1、P_2 的纵坐标有关．

5. 教科书第 101 页的例 3，介绍了直线方程的另一种形式——截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

只要学生了解即可．本小节只要掌握两点式方程就可以了．

3.2.3 直线的一般式方程

1. 分析直线的点斜式方程、斜截式方程、两点式方程的共同点，发现它们都是关于 x，y 的二元一次方程. 反过来，每一个关于 x，y 的二元一次方程是不是都表示一条直线呢？教科书提出了两个问题：

(1) 平面上每一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示吗？

(2) 每一个关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线吗？

第(1)个问题引导学生观察直线的点斜式方程、斜截式方程、两点式方程的共同点，加以归纳. 而第(2)个问题正是本小节所要讨论的主要问题.

2. 如何说明一个二元一次方程表示一条直线呢？只要说明它能够化成已经学习过的几种形式的方程中的一种就可以了.

对于任意一个二元一次方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B \text{ 不同时为 } 0),$$

之所以首先考虑 $B\neq0$ 的情形，是因为这样就可以变形为我们熟悉的斜截式方程.

当 $B\neq0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 变形为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

它表示经过点 $\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$，斜率是 $-\frac{A}{B}$ 的直线. 也可以说，这是直线的斜截式方程，它表示一条直线.

当 $B=0$ 时，由于 A，B 不同时为零，知 $A\neq0$，方程 $Ax+By+C=0$ 变形为 $x=-\frac{C}{A}$，它表示垂直于 x 轴的直线.

因为关于 x，y 的二元一次方程只有以上两种情形，不论哪种情形，它都表示一条直线. 因此，任何一个二元一次方程都表示平面上的一条直线，有时我们称直线 $Ax+By+C=0$.

3. 二元一次方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B \text{ 不同时为 } 0)$$

称为直线的一般式方程. 与前面学习的其他形式的直线方程的一个不同点是，直线的一般式方程能够表示平面上的所有直线，而点斜式、斜截式、两点式方程，都不能表示与 x 轴垂直的直线.

4. 本小节的最后，教科书说明应该从几何与代数两个角度看待二元一次方程：在代数中我们研究方程，着重研究方程的解，建立直角坐标系后，二元一次方程的每一个解都可以看成平面直角坐标系中的一个点的坐标，这个方程的解集，就是坐标满足二元一次方程的全体点的集合，这些点的集合组成一条直线. 直角坐标系把直线与方程联系起来.

四、补充例题

1. 设直线 l 的方程为 $(m^2-2m-3)x+(2m^2+m-1)y=2m-6$ ($m\in\mathbf{R}$，$m\neq-1$)，根据下列条件分别求 m 的值：

(1) l 在 x 轴上的截距是 -3；　　(2) 斜率为 1.

解：(1) 由题意，得

$$\frac{2m-6}{m^2-2m-3}=-3，且 m^2-2m-3\neq0.$$

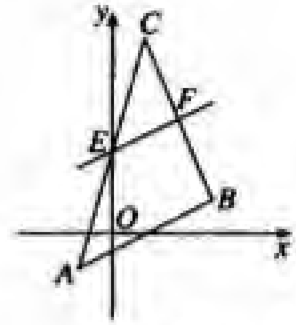
解得　$m=-\frac{5}{3}$.

(2) 由题意，得 $\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}=-1$，且 $2m^2+m-1\neq0$.

解得 $m=\frac{4}{3}$.

2. 已知△ABC 的顶点是 $A(-1, -1)$，$B(3, 1)$，$C(1, 6)$. 直线 l 平行于 AB，且分别交 AC，BC 于 E，F，△CEF 的面积是△CAB 面积的$\frac{1}{4}$. 求直线 l 的方程.

解：如图，由已知，直线 AB 的斜率 $k=\frac{1}{2}$.



（第 2 题）

因为 $EF/\!/AB$，所以直线 EF 的斜率也为$\frac{1}{2}$.

因为△CEF 的面积是△CAB 面积的$\frac{1}{4}$，所以 E 是 CA 的中点.

由已知，点 E 的坐标是$\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

直线 EF 的方程是 $y-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y+5=0$.

3. 已知直线 l 经过点 $E(1, 2)$，且与两坐标轴的正半轴围成的三角形的面积是 4，求直线 l 的方程.

解：设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

由题意，得

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1, \quad ①$$

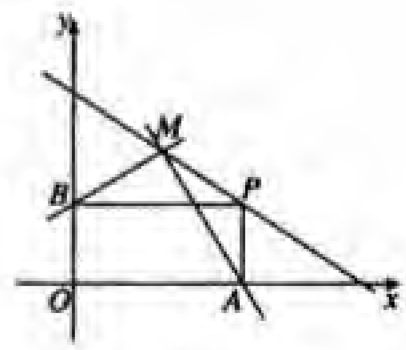
$$\frac{1}{2}ab=4. \quad ②$$

联立①、②，得 $a=2$，$b=4$.

所以，所求直线 l 的方程是 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，即 $4x+2y-8=0$.

说明：本题可以再开放一些，去掉条件中的“正半轴”，再解本题.

4. 点 A 是 x 轴上的动点，一条直线经过点 $M(2, 3)$，垂直于 MA，交 y 轴于点 B，过 A，B 分别作 x，y 轴的垂线交于点 P，求点 P 的坐标 (x, y) 满足的关系.



（第 4 题）

解：如图，因为 $PA\perp x$ 轴，点 P 的坐标为 (x, y)，所以设点 A 的坐标为 $(x, 0)$.

因为 $PB\perp y$ 轴，所以，点 B 的坐标是 $(0, y)$.

由已知，$k_{MA}=\frac{3}{2-x}$ $(x\neq2)$，$k_{MB}=\frac{3-y}{2}$.

因为 $MA\perp MB$，所以 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-1$，

即 $\frac{3}{2-x}\cdot\frac{3-y}{2}=-1$ $(x\neq2)$，

化简得 $2x+3y-13=0$.

当 $x=2$ 时，由 $2x+3y-13=0$ 知 $y=3$，点 P 与点 M 重合.

综合以上知，点 P 的坐标 (x, y) 所满足的条件是

$$2x+3y-13=0.$$

五、习题解答

练习（第 100 页）

1. (1) $y+1=\sqrt{2}(x-3)$；　(2) $y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{2})$；

(3) $y-3=0$；　(4) $y+2=-\sqrt{3}(x+4)$.

2. (1) 1，45°；　(2) $\sqrt{3}$，60°.

3. (1) $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-2$；　(2) $y=-2x+4$；

4. (1) $l_1 /\!/ l_2$；　(2) $l_1 \perp l_2$.

练习（第 102 页）

1. (1) $\frac{y-1}{(-3)-1}=\frac{x-2}{0-2}$；　(2) $\frac{y-5}{0-5}=\frac{x-0}{5-0}$.

2. (1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$，即 $3x+2y-6=0$，图略；

(2) $\frac{x}{-5}+\frac{y}{6}=1$，即 $6x-5y+30=0$，图略.

3. 解：(1) 设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，因为由直线 l 过点(0，5)，且在两坐标轴上得截距之和为 2，所以

$$\frac{0}{a}+\frac{5}{b}=1,$$
$$a+b=2.$$

解得 $a=-3$，$b=5$.

因此，所求直线的方程是$\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$，即 $5x-3y+15=0$.

(2) 设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，因为直线 l 过点(5，0)，且在两坐标轴上得截距之差为 2，所以

$$\frac{5}{a}+\frac{0}{b}=1,$$
$$|a-b|=2.$$

解得 $a=5$，$b=3$；或者 $a=5$，$b=7$.

因此，所求直线的方程是$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$，或者$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$，即 $3x+5y-15=0$，或 $7x+5y-35=0$.

练习（第 105 页）

1. (1) $y+2=-\frac{1}{2}(x-8)$，化成一般式

$$x+2y-4=0;$$

(2) $y-2=0$；

(3) $\frac{y-(-2)}{-4-(-2)}=\frac{x-3}{5-3}$，化成一般式

$$x+y-1=0;$$

(4) $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}=1$，化成一般式

$$2x-y-3=0.$$

2. (1) 当 $B\neq0$ 时，直线 l 的斜率是 $-\dfrac{A}{B}$；

当 $B=0$ 时，直线 l 的斜率不存在.

(2) 当 $C=0$，A，B 不全是零时，方程 $Ax+By+C=0$ 表示的直线经过原点.

3. (1) -3，5； (2) $\dfrac{5}{4}$，-5；

(3) $-\dfrac{1}{2}$，0； (4) $\dfrac{7}{6}$，$\dfrac{2}{3}$.

习题 3.2 A 组

1. (1) $y+2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-8)$，即 $\sqrt{3}x-3y-6-8\sqrt{3}=0$；

(2) $x+2=0$；

(3) $y=-4x+7$，即 $4x+y-7=0$；

(4) $\dfrac{y-8}{-2-8}=\dfrac{x-(-1)}{4-(-1)}$，即 $2x+y-6=0$；

(5) $y-2=0$；

(6) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1$，即 $3x-4y-12=0$.

2. 解法一：直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{7-3}{5-1}=1$；

直线 AC 的斜率为 $k_{AC}=\dfrac{12-3}{10-1}=1$.

又直线 AB 与直线 AC 有公共点 A，所以 A，B，C 三点共线.

解法二：直线 AB 的斜率 $k_{AB}=1$，所以，经过 A，B 的直线方程是

$$y-3=x-1,$$

把点 C 的坐标（10，12）代入方程，得 $10-12+2=0$，满足方程．所以点 C 在直线 AB 上，A，B，C 三点共线.

3. 解：已知两点 $A(7,-4)$，$B(-5,6)$，则线段 AB 的中点 M 坐标是 $(1,1)$.

因为直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=-\dfrac{5}{6}$，

所以，线段 AB 的垂直平分线的斜率是 $\dfrac{6}{5}$.

因此，线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y-1=\dfrac{6}{5}(x-1)$.

即 $6x-5y-1=0$.

4. 解法一：由已知，线段 AB 的中点 E 的坐标是 $\left(6,\dfrac{3}{2}\right)$，

线段 AC 的中点 F 的坐标是 $(1,4)$.

经过 E，F 的直线的两点式方程是

$$\frac{y-\dfrac{3}{2}}{4-\dfrac{3}{2}}=\frac{x-6}{1-6},$$

化成一般式

$$x+2y-9=0.$$

解法二：由已知，线段 AB 的中点 E 的坐标是 $\left(6,\ \frac{3}{2}\right)$，

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{3-(-2)}{-6-4}=-\frac{1}{2}$.

连接线段 AB，AC 中点的直线平行于 BC，所以，经过 AB，AC 中点的直线的方程是

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-6)，即\ x+2y-9=0.$$

5. 解：因为直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，

所以，经过点 $A(2,\ -3)$，斜率为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的直线方程是

$$y+3=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-2)，即\ 2x-\sqrt{3}y-4-3\sqrt{3}=0.$$

[redacted] 此题可以改为：一条直线经过点 $A(2,\ -3)$，并且它的倾斜角是直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角的 2 倍，求这条直线的方程.

6. 解：设弹簧原长为 b，弹性系数为 k，弹簧的长度 l 与物体重量 F 之间的关系方程为 $l-b=kF$.

由题意，当 $F=4$ 时，$l=20$，

所以 $$20-b=4k；\quad ①$$

当 $F=5$ 时，$l=21.5$，

所以 $$21.5-b=5k.\quad ②$$

①、②联立，解得 $k=1.5$，$b=14$.

因此，弹簧的长度 l 与重量 F 之间的关系方程为

$$l=1.5F+14.$$

7. 解：设铁棒的长 l（m）与温度 t（℃）之间的关系为 $l=kt+b$.

由题意，$t=40$ 时，$l=12.506$，

所以 $$40k+b=12.506；\quad ①$$

又当 $t=80$ 时，$l=12.512$，

所以 $$80k+b=12.512.\quad ②$$

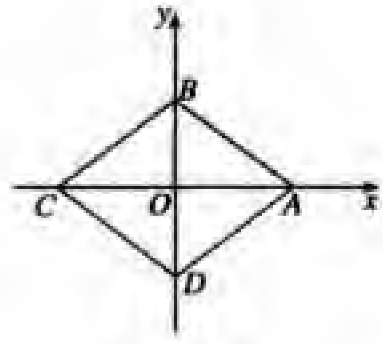
①、②联立，解得 $k=0.00015$，$b=12.500$.

铁棒的长度 l 与温度 t 之间的关系方程为

$$l=0.00015t+12.500.$$

当 $t=100$ 时，$l=12.515$.

8. 解：由已知，$A(4,\ 0)$，$B(0,\ 3)$，$C(-4,\ 0)$，$D(0,\ -3)$.



（第 8 题）

AB 边所在直线的方程是 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$，即

$$3x+4y-12=0；$$

BC 边所在的直线方程是 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$，即

$$3x-4y+12=0；$$

CD 边所在的直线方程是 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$，即

$$3x+4y+12=0；$$

边 DA 所在的直线方程是$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$，即

$$3x-4y-12=0.$$

9. 解：因为直线 l 经过点 $P(2, 3)$，且在 x、y 轴上的截距相等，所以

(1) 当直线 l 过原点时，它的方程为 $3x-2y=0$；

(2) 当直线 l 不过原点时，设它的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$.

由已知，得

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=1.$$

解得　$a=5$.

所以，直线 l 的方程为 $x+y-5=0$.

因此，所求直线 l 的方程为 $3x-2y=0$，或者 $x+y-5=0$.

10. 解：(1) 由直线的方程 $4x+y-2=0$ 得直线的斜率为-4，所以经过点 $A(3, 2)$，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行的直线方程为

$$y-2=-4(x-3)，即 4x+y-14=0.$$

(2) 由已知，经过两点 $M(1, 2)$和 $N(-1, -5)$的直线的斜率

$$k=\frac{7}{2}.$$

所以，经过点 $C(2, -3)$，且平行于 MN 的直线方程为

$$y+3=\frac{7}{2}(x-2)，即 7x-2y-20=0.$$

(3) 由已知，方程 $2x+y-5=0$ 表示的直线的斜率 $k=-2$.

所以，与直线 $2x+y-5=0$ 垂直的直线的斜率为 $\frac{1}{2}$.

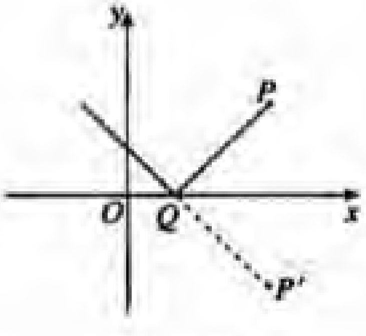
所以，经过点 $B(3, 0)$，且与 $2x+y-5=0$ 垂直的直线方程为

$$y=\frac{1}{2}(x-3)，即 x-2y-3=0.$$

11. 解：如图，入射线所在的直线就是直线 PQ.

由已知，根据直线的两点式方程，得直线 PQ 的方程是

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-2}{6-2}，即 x-y-2=0.$$



(第 11 题)

根据光的反射原理，作出与点 P 关于 x 轴对称的点 P'，直线 $P'Q$ 就是反射光线所在的直线，它的方程是

$$x+y-2=0.$$

综上，入射光线和反射光线所在直线的方程分别是

$$x-y-2=0，x+y-2=0.$$

B 组

1. 解：(1) BC 边所在的直线的斜率$k=\frac{7-3}{6-0}=\frac{2}{3}$，

因为 BC 边上的高与 BC 垂直，所以 BC 边上的高所在直线的斜率为$-\frac{3}{2}$.

又 BC 边上的高经过点 $A(4,\ 0)$，

所以 BC 边上的高所在的直线方程为

$$y=-\frac{3}{2}(x-4)，即\ 3x+2y-12=0.$$

(2) 由已知得，BC 边中点 E 的坐标是 $(3,\ 5)$.

又 $A(4,\ 0)$，所以，直线 AE 的方程为

$$\frac{y-0}{5-0}=\frac{x-4}{3-4}，即\ 5x+y-20=0.$$

(3) 由已知得，直线 BC 的斜率 $k=\frac{7-3}{6-0}=\frac{2}{3}$，

BC 边中点 E 的坐标是 $(3,\ 5)$.

所以，BC 的垂直平分线的方程是

$$y-5=-\frac{3}{2}(x-3)，即\ 3x+2y-19=0.$$

2. 解：(1) 直线 $Ax+By+C=0$ 与 x 轴相交，即方程组

$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ y=0\end{cases}$ 有唯一解，于是 $A\neq0$；

同理，直线 $Ax+By+C=0$ 与 y 轴相交时有 $B\neq0$.

所以，$A\neq0$，且 $B\neq0$ 时，已知直线与两条坐标轴都相交；

(2) 已知直线只与 x 轴相交，即直线平行于 y 轴或与 y 轴重合．所以当 $B=0$ 时，已知直线方程成为 $x=-\frac{C}{A}$，只与 x 轴相交；

(3) 同理，当 $A=0$ 时，已知直线只与 y 轴相交；

(4) 因为 x 轴的方程为 $y=0$，所以，当 $A=0$，$C=0$ 时，已知直线就是 x 轴；

(5) 因为 y 轴的方程为 $x=0$，所以，当 $B=0$，$C=0$ 时，已知直线就是 y 轴.

3. 证明：由已知，点 $P(x_0,\ y_0)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，所以有

$$Ax_0+By_0+C=0.$$

于是 $Ax+By+C=Ax_0+By_0+C$，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

4. 解：由 $A_1A_2+B_1B_2=0$，

(1) 设 $B_1B_2\neq0$，有直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$，且 $\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1$，所以，$l_1\perp l_2$.

(2) 设 $B_1B_2=0$，

① 不妨设 $B_1=0$，$B_2\neq0$，则有 $A_1\neq0$，则直线 l_1 的方程化为

$$x=-\frac{C_1}{A_1}，l_1\ 平行于\ y\ 轴.$$

又 $A_1A_2=0$，则 $A_2=0$，直线 l_2 的方程化为 $y=-\frac{C_2}{B_2}$，l_2 平行于 x 轴.

显然 $l_1\perp l_2$.

② 若 $B_1=0$，且 $B_2=0$．又因为 $A_1A_2=0$，A_1，A_2 中必有一个是 0，这与 A_1，B_1 不同时为 0，A_2，B_2 不同时为 0 矛盾.

5. 解：显然，直线 l 不垂直于 x 轴．设直线 l 的方程为 $y=kx+b$.

直线向左平移 3 个单位，再沿 y 轴向上平移 1 个单位后成为直线 l'

$$y=k(x+3)+1+b.$$

因为 l 与 l' 是同一条直线，所以有

$$kx+b=k(x+3)+1+b.$$

解得 $k=-\frac{1}{3}$.

所以，所求直线的斜率为 $-\frac{1}{3}$.

6. 答：经过画点、计算、观察知，直线 l 上的点的坐标使得 $2x-y+3$ 的值等于零，在直线 l 同旁的点的坐标使得 $2x-y+3$ 的值同号. 在直线 l 上方的点的坐标使得 $2x-y+3$ 的值小于零，在直线 l 下方的点的坐标使得 $2x-y+3$ 的值大于零.

3.3 直线的交点坐标与距离公式

一、本节知识结构

本节分为四个小节，由四部分组成：两条直线交点的坐标、两点间的距离、点到直线的距离、两条平行直线间的距离. 其结构如下图所示.

二、教学重点与难点

教学重点是两条直线的交点坐标，难点是点到直线的距离公式的推导.

三、教科书编写意图与教学建议

3.3.1 两条直线的交点坐标

1. 在平面几何中，我们可以对直线做定性的研究. 引入平面直角坐标系后，我们用方程表示直线，直线的方程就是直线上每一个点的坐标满足的一个关系式，即二元一次方程. 这样，我们可以通过方程把握直线上的点，即用代数方法来研究直线上的点，对直线进行定量的研究.

上一节，我们在平面直角坐标系中建立了直线方程的各种形式，为利用直线方程研究几何问题做了准备. 这一节，我们将通过直线的方程，用代数方法解决与直线有关的问题，如求两条直线的交点坐标、两点间的距离、点到直线的距离以及两条平行线间的距离等等.

2. 教科书给出两条直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 的方程以后，设置了一个表格，要求学生填充表格，目的之一在于体验坐标法的思想.

表格的左边一栏是几何元素或几何关系，而右边一栏是代数表示或代数关系：

几何元素及关系	代数表示
点 A	$A(a, b)$
直线 l	l：$Ax+By+C=0$
点 A 在直线 l 上	$Aa+Bb+C=0$
直线 l_1 和 l_2 的交点是 A	点 A 的坐标是方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解

3. 两条直线交点位置的确定体现了坐标法的思想. 两条直线的交点坐标就是由这两条直线的方程组成的方程组的解，因此，确定两条直线交点的位置就是解方程组找出它的解. 如果这个方程组只有一个解，说明这两条直线只有一个交点；如果这个方程组没有解，说明这两条直线没有公共点，是两条平行直线.

教科书对于方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

并没有进行一般性地讨论，直接给出了下面的结论：

若方程组有唯一解，则两条直线相交，此解就是交点的坐标；

若方程组无解，则两条直线无公共点，此时两直线平行.

相应地，教科书配置了例 2，通过两条直线的方程组成的方程组解的情况判断两条直线是交于一点还是平行，例 2 中第(3)题中的两个方程经过化简后是同一个方程，表示同一条直线.

这样设置的目的在于适当降低要求. 如果学生的基础比较好，可以对一般情形进行讨论.

4. 紧接着例 1，教科书在第 109 页提出了一个让学生探究的问题：

当 λ 变化时，方程

$$3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$$

表示什么图形，图形有何特点？

(1) 如果条件许可，运用信息技术工具，当 λ 取不同值(或者动态改变 λ 的值)画出各种图形. 经过观察，不仅可以发现方程 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$ 表示直线，同时发现这些直线的共同特点是经过同一个点.

(2) 找出(度量或者猜想)这个点的坐标(与例 1 联系起来)，并代入方程 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$，会发现这个点的坐标满足

$$3x+4y-2=0，且 2x+y+2=0.$$

可见这个点就是直线 l_1：$3x+4y-2=0$ 与直线 l_2：$2x+y+2=0$ 的交点.

(3) 方程 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$ 表示经过两条直线 l_1 与 l_2 交点的直线的集合——直线束(图 3-9).

(4) 另外，此问题可以适当开放，提出“在这个集合中，如何确定经过点$(4, -2)$的直线？”的问题.

学生会发现只要把坐标$(4, -2)$代入方程 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$ 确定 λ，反过来把 λ 的值代入

方程 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$ 就可以了．即

$$3\times4+4\times(-2)-2+\lambda[2\times4+(-2)+2]=0,$$

解得 $\lambda=-\frac{1}{4}$.

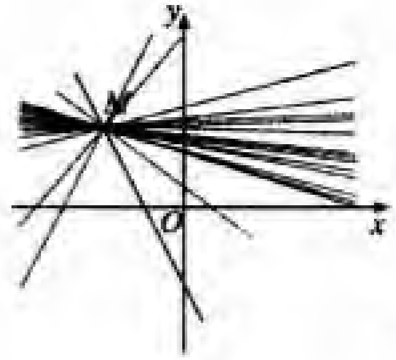


图 3-9

把 $\lambda=-\frac{1}{4}$ 代入 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$ 得

$$3x+4y-2-\frac{1}{4}(2x+y+2)=0,$$

经整理，得 $2x+3y-2=0$.

因此，经过直线 $3x+4y-2=0$ 与直线 $2x+y+2=0$ 交点，且经过点 $(4, -2)$ 的直线的方程是 $2x+3y-2=0$.

3.3.2 两点间的距离

1. 这一小节主要设置了两个问题，一个是建立直角坐标系中两点间的距离公式，另一个是用坐标法证明简单的平面几何问题.

根据勾股定理，两点间的距离公式不难得到．在教学过程中，可以提出问题以后让学生思考．这样做，可以了解学生作图以及文字表达是否规范.

两点间距离公式建立的过程对建立点到直线的距离公式有启发作用.

2. 关于例 3 的教学.

教科书给出的解法是列出点 $P(x, 0)$ 的横坐标 x 的方程，求出 x，这是典型的坐标法．除此之外，还可以提问学生是否有其他解法?

结合图形，可以发现，所求的点就是线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点．因此有下列解法.

补充解法：由已知得，线段 AB 的中点是 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$，直线 AB 的斜率 $k=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$．线段 AB 的垂直平分线的方程是

$$y-\frac{2+\sqrt{7}}{2}=\frac{3}{2-\sqrt{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

在上式中，令 $y=0$，解得 $x=1$.

所以，所求的点 P 的坐标是 $(1, 0)$．因此

$$|PA|=\sqrt{(1+2)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}.$$

3. 例 4 是用坐标法证明平面几何问题．用综合几何的方法证明这个命题，需要添置辅助线，反复利用勾股定理，比较繁琐．这里给出过程供参考：

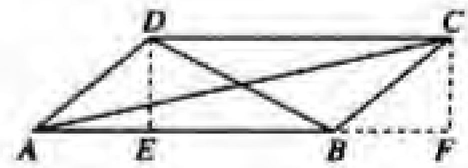


图 3-10

证明：如图 3-10，过 D 作 AB 的垂线，垂足为 E.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DBE$ 中，$|BD|^2=|DE|^2+|EB|^2$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$|AD|^2=|DE|^2+|AE|^2$.

过 C 作 AB 的垂线，与 AB 的延长线交于垂足 F.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CAF$ 中，$|AC|^2=|AF|^2+|CF|^2$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBF$ 中，$|BC|^2=|BF|^2+|CF|^2$.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $|AD|=|BC|$，$AD/\!/BC$.

于是 $$\angle DAE=\angle CBF.$$

所以，$\mathrm{Rt}\triangle DAE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBF$.

所以，$|AE|=|BF|$.

因为 $|AB|=|AE|+|EB|$，$|AF|=|AB|+|BF|$，

所以
$$\begin{aligned}|BD|^2+|AC|^2&=|DE|^2+|EB|^2+|AF|^2+|CF|^2\\&=|DE|^2+(|AB|-|AE|)^2+(|AB|+|BF|)^2+|CF|^2\\&=2|AB|^2+|DE|^2+|AE|^2+|BF|^2+|CF|^2\\&=2|AB|^2+|AD|^2+|BC|^2\\&=|AB|^2+|AD|^2+|BC|^2+|CD|^2.\end{aligned}$$

4. 教科书在第 112 页对例 4 设置了一个思考题："在例 4 中，你是否还有其他建立坐标系的方法？与你的同学交流．你能体会到适当建立坐标系对证明的重要性吗？" 目的是让学生体会适当建立坐标系，可以简化计算．

实际上，本题还可以以对角线的交点为原点，一条对角线所在的直线为 x 轴建立直角坐标系来证明．具体证明见下．

证明：如图 3-11，以平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为原点，对角线 DB 所在的直线为 x 轴，建立如图所示的坐标系．

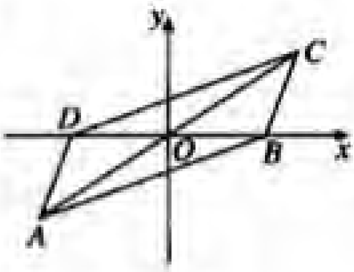


图 3-11

设 C 的坐标为 (a,c)，B 的坐标为 $(b,0)$（a，b，c 都是正数），由平行四边形的性质可以知道，点 A 的坐标为 $(-a,-c)$，点 D 的坐标为 $(-b,0)$．所以，

$$|DB|^2=4b^2.$$
$$|AC|^2=[a-(-a)]^2+[c-(-c)]^2=4(a^2+c^2).$$
$$|BC|^2=(a-b)^2+c^2,\ |CD|^2=(a+b)^2+c^2.$$
$$|DB|^2+|AC|^2=4(a^2+b^2+c^2).$$
$$\begin{aligned}&2(|BC|^2+|CD|^2)\\&=2[(a-b)^2+c^2+(a+b)^2+c^2]\\&=4(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

因为 $|AB|=|CD|$，$|BC|=|AD|$，

所以结论成立．

5. 通过例 4，我们可以初步总结出用坐标法解决平面几何问题的基本步骤．教科书以框图的方式给出：

第一步：建立坐标系，用坐标表示有关量；

第二步：进行有关的代数运算；

第三步：把代数运算结果"翻译"成几何关系．

教科书在"第四章 圆与方程"也要涉及用坐标法解决几何问题，这里要求不要过高．实际上，在第二步中还需要明确几何关系的代数意义，这样才能进行有目的的代数运算．

3.3.3 点到直线的距离

1. 这一小节与上一小节一样，仍是直线方程的应用，坐标法的继续．这一节主要研究点到直线的距离公式：

已知点 $P_0(x_0,y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$（A，B 不同时为零），如何用 x_0，y_0，A，B，C 表示点 P_0 到直线 l 的距离．

2. 教学中，可以首先明确条件，提出问题，然后让学生充分讨论，研究如何解决这个问题．

根据点到直线的距离的概念，学生容易想到的是过点 P_0 作直线 l 的垂线，写出这条垂线的方程；

然后与直线 l 的方程联立成方程组，解这个方程组得到交点 Q 的坐标；再利用两点间的距离公式，求出点 P_0 与交点 Q 的距离．这是典型的坐标法，不妨让学生沿着这条思路走下去，求出结果来，而不是直接介绍教科书上的方法．直接求交点，再求两点间距离的过程如下．

解：如图 3-12，过点 $P_0(x_0, y_0)$ 作直线 l 的垂线，垂足为 Q．

（1）若直线 l 平行于 x 轴，即 $A=0$，直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 变形为

$$y=-\frac{C}{B}\ (\text{因为 } B\neq 0).$$

点 P 到直线 l 的距离 $\quad d=\left|y_0+\frac{C}{B}\right|$.

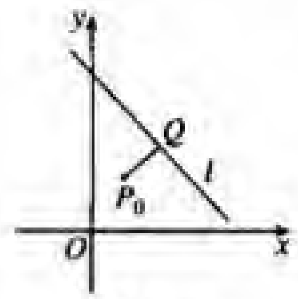


图 3-12

（2）若直线 l 垂直于 x 轴，即 $B=0$，直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 变形为

$$x=-\frac{C}{A}\ (\text{因为 } A\neq 0).$$

点 P_0 到直线 l 的距离 $\quad d=\left|x_0+\frac{C}{A}\right|$.

（3）若直线 l 既不垂直于 x 轴，又不平行于 x 轴，由直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 可得，它的斜率是 $-\frac{A}{B}$.

直线 P_0Q 的方程为 $\quad y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$，

即

$$Bx-Ay=Bx_0-Ay_0.$$

与直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 联立，解得

$$x=\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},$$

$$y=\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}.$$

即 $Q\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ \frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)$，所以

$$|P_0Q|=\sqrt{\left(x_0-\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{A^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

虽然计算比较繁琐，但是思路简捷．在这个过程中，学生能够体会坐标法的思想．

3. 教科书所介绍的方法是先求与坐标轴平行的线段的长度，再求与坐标轴不平行的线段的长度．

4. 点到直线的距离公式还有其他证明方法，下列方法仅供参考．

证明：如图 3-13，设 $A\neq 0$，$B\neq 0$，则直线 P_0Q 的斜率为 $\frac{B}{A}$，方程为

$$y-y_0=\frac{B}{A}\ (x-x_0),$$

即

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0. \qquad ①$$

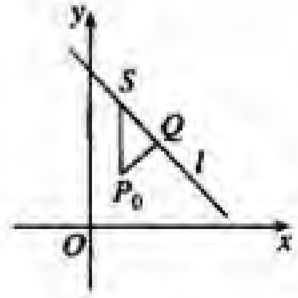


图 3-13

与直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 联立，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C). \qquad ②$$

即点 Q 的坐标满足方程 ①与②.

把①与②看成关于 $x-x_0$，$y-y_0$ 的方程组，解得

$$x-x_0=\frac{-A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2},$$

$$y-y_0=\frac{-B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}.$$

于是，

$$\begin{aligned}|P_0Q|&=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\\&=\sqrt{\frac{(A^2+B^2)(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\end{aligned}$$

所以，点 $P_0(x_0,y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离是

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

当 $A=0$，或 $B=0$ 时，上式仍然成立.

5. 在解决例 6 后，教科书提出“例 6 还可以有其他解法吗?”事实上，还可以通过面积割补的方法计算$\triangle ABC$ 的面积.

解：如图 3-14，延长 AB 交 x 轴于点 D. 过 A，B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 M，N，即$\triangle ACD$ 的 CD 边上的高为 AM，$\triangle CBD$ 的 CD 边上的高为 BN.

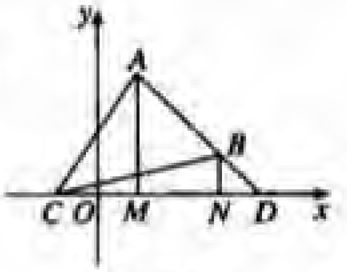


图 3-14

由已知得，直线 AB 的方程为

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{3-1}，即 x+y-4=0.$$

在上式中，令 $y=0$，得 $x=4$，所以点 D 的坐标是$(4,0)$. 又 $|CD|=5$，所以

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times5\times(3-1)=5.$$

3.3.4 两条平行直线间的距离

1. 两条平行线间的距离是点到直线距离公式的一个应用，学生掌握并不困难.

教科书的正文中没有讨论一般情况，而是在习题 3.3 B 组中作为一个习题提出. 不必要求学生记住结论，能够知道如何解决这个问题就可以了.

需要注意的是，这一问题的解决过程体现了“化归”的思想方法，也就是，把两条直线间的距离转化为直线上的一个点到另外一条直线的距离，利用点到直线间距离公式来求平行线之间的距离.

四、补充例题

1. 已知$\triangle ABC$的三边 BC，CA，AB 的中点分别是 $D(-2,-3)$，$E(3,1)$，$F(-1,2)$. 先画出这个三角形，再求出三个顶点的坐标.

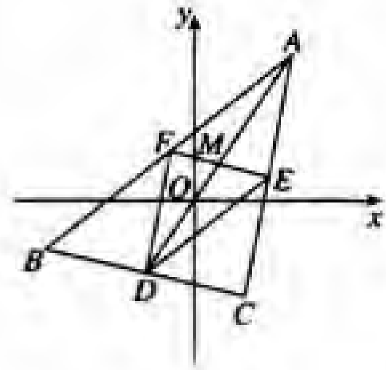
解法一：如图，过 D，E，F 分别作 EF，FD，DE 的平行线，作出这些平行线的交点，就是$\triangle ABC$ 的三顶点 A，B，C.

由已知得直线 DE 的斜率

$$k_{DE}=\frac{1+3}{3+2}=\frac{4}{5}，所以 k_{AB}=\frac{4}{5}.$$

因为直线 AB 过点 F，所以直线 AB 的方程为

$$y-2=\frac{4}{5}(x+1)，即 4x-5y+14=0. \quad ①$$



（第 1 题）

由于直线 AC 经过点 $E(3,\ 1)$，且平行于 DF，

同法可得直线 AC 的方程

$$5x-y-14=0. \quad ②$$

联立①，②，解得点 A 的坐标是 $(4,\ 6)$.

同样，可以求得点 B，C 的坐标分别是$(-6,\ -2)$，$(2,\ -4)$.

因此，$\triangle ABC$ 的三顶点是 $A(4,\ 6)$，$B(-6,\ -2)$，$C(2,\ -4)$.

解法二：连结 AD，与 EF 交于点 M.

因为四边形 $AFDE$ 是平行四边形，所以 M 是 AD，EF 的中点.

所以，$x_A+x_D=x_E+x_F$，$y_A+y_D=y_E+y_F$，于是

即 $x_A=x_E+x_F-x_D=3-1+2=4$，$y_A=y_E+y_F-y_D=1+2+3=6$.

所以，点 A 的坐标是$(4,\ 6)$.

同理可得，点 B，C 的坐标分别是$(-6,\ -2)$，$(2,\ -4)$.

因此，$\triangle ABC$ 的三顶点是 $A(4,\ 6)$，$B(-6,\ -2)$，$C(2,\ -4)$.

2. 已知两定点 $A(2,\ 5)$，$B(-2,\ 1)$，直线 $y=x$ 上有两动点 M，N，且 $|MN|=2\sqrt{2}$. 如果直线 AM 与 BN 的交点正好落在 y 轴上，求 M，N 的坐标以及两直线 AM 与 BN 的交点 C 的坐标.

解：设点 C 的坐标为$(0,\ b)$.

AC 的方程为
$$y=-\frac{b-5}{2}x+b. \quad ①$$

BC 的方程为
$$y=\frac{b-1}{2}x+b. \quad ②$$

① 与 $y=x$ 联立，解得点 M 的坐标为$\left(\frac{2b}{b-3},\ \frac{2b}{b-3}\right)$.

② 与 $y=x$ 联立，解得点 N 的坐标为$\left(-\frac{2b}{b-3},\ -\frac{2b}{b-3}\right)$.

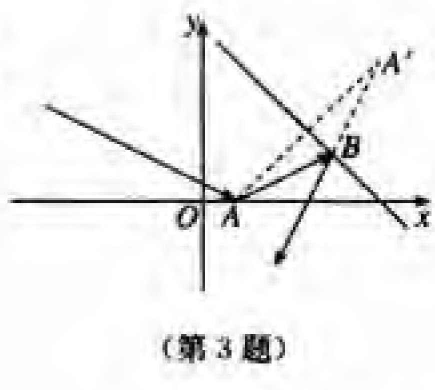
由 $|MN|=2\sqrt{2}$，得$\sqrt{2}\left|\frac{2b}{b-3}+\frac{2b}{b-3}\right|=2\sqrt{2}$，解得 $b=-3$ 或 $b=1$.

所以 $M(1,\ 1)$，$N(-1,\ -1)$，$C(0,\ -3)$ 或者 $M(-1,\ -1)$，$N(1,\ 1)$，$C(0,\ 1)$.

因此，所求点 C 的坐标是$(0,\ -3)$，或$(0,\ 1)$.

3. 光线沿直线 $x+2y-1=0$ 射入，遇 x 轴后反射，反射光线遇直线 $x+y-5=0$ 又反射，求反射线最终所在直线的方程.

解：由已知可得，直线 $x+2y-1=0$ 与 x 轴的交点 A 的坐标是$(1,\ 0)$. 如图，根据光的反射原理，反射线所在的直线与直线 $x+2y-1=0$ 关于 x 轴对称，所以反射线所在直线 AB 的方程为 $x-2y-1=0$.



（第 3 题）

解方程组

$$\begin{cases}x-2y-1=0,\\x+y-5=0,\end{cases}$$

得点 B 的坐标是$\left(\frac{11}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.

设点 $A'(x_0,\ y_0)$ 与点 A 关于直线 $x+y-5=0$ 对称，

则有
$$\frac{y_0}{x_0-1}=1. \qquad ①$$

因为线段 AA' 的中点在直线 $x+y-5=0$ 上，所以有
$$\frac{x_0+1}{2}+\frac{y_0}{2}-5=0. \qquad ②$$

联立①、②，解方程组得 $x_0=5$，$y_0=4$.

所以，点 A' 的坐标是 $(5,\ 4)$.

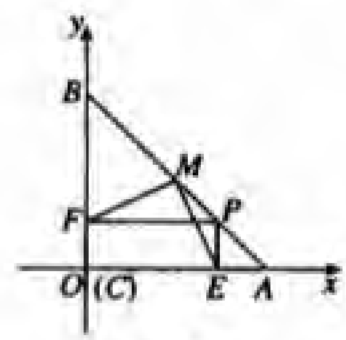
直线 $A'B$ 的方程为 $\dfrac{y-4}{\frac{4}{3}-4}=\dfrac{x-5}{\frac{11}{3}-5}$，即 $2x-y-6=0$.

所以，反射线最终所在直线的方程为 $2x-y-6=0$.

4. 设点 M 是等腰直角三角形 ABC 的底边 BC 的中点，P 是直线 BC 上任意一点，PE 垂直于 AB，E 为垂足，PF 垂直于 AC，F 为垂足. 求证：

(1) $|ME|=|MF|$；　　(2) $ME\perp MF$.

证明：(1) 如图，以等腰直角三角形的直角顶点 C 为坐标原点 O，以 $|OA|$ 为单位长，直线 OA，OB 分别为 x 轴、y 轴，建立直角坐标系. 则 $A(1,\ 0)$，$B(0,\ 1)$，$M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.



(第 4 题)

设 $P(x_0,\ y_0)$，则有
$$x_0+y_0=1.$$

因为 $PE\perp OA$，$PF\perp OB$，所以，$E(x_0,\ 0)$，$F(0,\ y_0)$.
$$|ME|=\sqrt{\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}},\ |MF|=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-y_0\right)^2}.$$

因为 $x_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-y_0$，所以 $|ME|=|MF|$.

(2) 证法一：因为 $|ME|^2+|MF|^2=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-y_0\right)^2=x_0^2+y_0^2$，
$$|EF|^2=x_0^2+y_0^2,$$

所以，$|ME|^2+|MF|^2=|EF|^2$，$\triangle MEF$ 是直角三角形，

因此，$\angle EMF=90°$，$ME\perp MF$.

证法二：由已知，$k_{ME}=\dfrac{1}{1-2x_0}$，$k_{MF}=1-2y_0$.

注意到 $x_0+y_0=1$，则有 $1-2y_0=2x_0-1$.

所以，$k_{ME}\cdot k_{MF}=\dfrac{1}{1-2x_0}(1-2y_0)=-1$，即 $ME\perp MF$.

点到直线的距离

1. 教学任务分析

学生已经有的相关知识是：两点间距离公式，直线的倾斜角、斜率，直线方程的各种形式，直线间关系判断的依据；并且经历了建立这些公式、解决这些问题的过程，积累了一定的用坐标法思想解决问题的经验与各种具体方法．这一节课的任务是：给出已知点的坐标与已知直线的方程，求点到直线的距离，建立点到直线的距离的公式．从学生已经有的知识与经验看，不难知道，可以把点到直线的距离问题转化为点到点的距离问题，从而完成任务．

从课型来说，应该属于"问题教学"．以一个问题为载体，学生在教师的引导与帮助下，分析、研究问题，制订解决问题的策略，选择解决问题的方法．

通过一个数学问题的解决，让学生参与教学过程．在这个过程中，教师尊重学生的思维过程，充分发挥学生在学习中的主动性以及他们之间的合作交流．

2. 教学重点与难点

重点：点到直线距离公式的建立．难点：选择恰当的解决问题的方法．

3. 教学基本流程

提出问题

分析任务，选择方法

合作、交流，解决问题

反思解决问题的过程

重新优化解决问题的方法

简单应用，巩固知识

4. 教学情境设计

（1）教师帮助学生回忆曾经学习过的两点间距离公式

已知点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

（用点 P_1、P_2 的坐标表示它们之间的距离 $|P_1P_2|$）

把其中一个元素换成直线，提出新的问题：即

已知点的坐标 $P_0(x_0, y_0)$，直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$，如何用 x_0、y_0、A、B、C 表示点 P 到直线 l 的距离．

（2）数形结合，分析任务，理清思路，画出框图．

学生已经有点到直线的距离的概念，即由点 P_0 画直线 l 的垂线，垂足是 Q，只要求两点 P_0 与 Q 之间的距离．

这里体现了“化归”的数学思想方法，把一个新问题转化为一个曾经解决过的问题，一个自己熟悉的问题.

画出图形，分析任务，理清思路，画出框图.

(可以让学生讨论：你打算怎么办?)

如图 3-15，要求 $|P_0Q|$，只要求出点 Q 的坐标. 而点 Q 是直线 l 与直线 P_0Q 的交点，直线 l 已经给出，只要先求出直线 P_0Q 的方程. 已知 P_0Q 经过点 P_0，因此只要求出直线 P_0Q 的斜率. 而 P_0Q 与直线 l 垂直，直线 l 的斜率可以求出来. 因此应首先求出直线 l 的斜率.

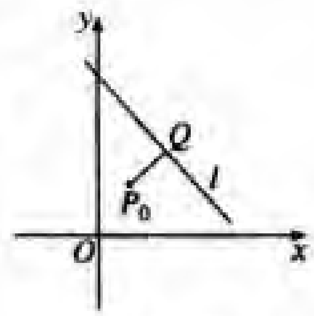
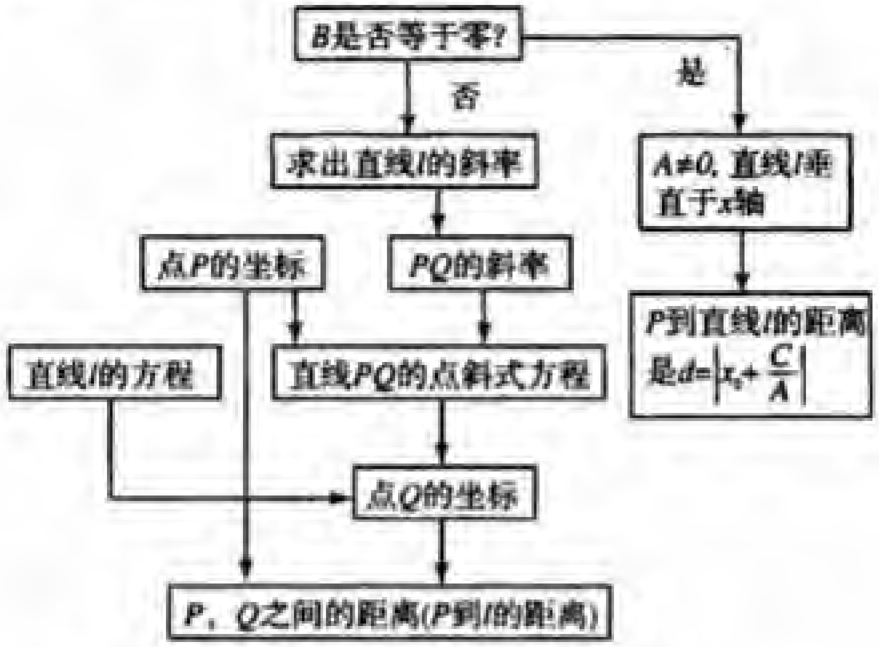


图 3-15

可以画出框图，明晰思路：



(3) 实施计划，细心演算，规范表达，解决问题.

教师可以让几个学生板演，其他以同课桌同学为合作单元，实施计划.

虽然思路清晰，但是过程确比较繁琐，要求学生细心演算. 教师可以在学生中走动，观察他们的活动过程，及时给予帮助.

解：如图 3-15，过点 $P_0(x_0, y_0)$作直线 l 的垂线，垂足为 Q.

(1) 若直线 l 平行与 x 轴，即 $A=0$，直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 为

$$y=-\frac{C}{B}\ (\text{因为 } B\neq 0).$$

点 P 到直线 l 的距离 $d=\left|y_0+\frac{C}{B}\right|$.

(2) 若直线 l 垂直于 x 轴，即 $B=0$，直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 为

$$x=-\frac{C}{A}\ (\text{因为 } A\neq 0).$$

点 P_0 到直线 l 的距离 $d=\left|x_0+\frac{C}{A}\right|$.

(3) 若直线 l 既不垂直于 x 轴，又不平行于 x 轴，由直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 可得，它的斜率是 $-\frac{A}{B}$.

直线 P_0Q 的方程为 $y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$，即 $Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$.

与直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 联立，得方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ Bx-Ay=Bx_0-Ay_0.\end{cases}$$

解得

$$x=\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ y=\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}.$$

即

$$Q\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ \frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right).$$

$$\begin{aligned}|P_0Q|&=\sqrt{\left(x_0-\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{A^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\end{aligned}$$

虽然这个过程计算比较繁，但是，教学是一个过程，在这个过程中使得学生知识、能力、意志品质都得到发展．不一定非采用教科书中介绍的方法强加于人，注意把数学的学术形态转化为教育形态．通过评价、反思这一方法，分析、引导，说明课本中方法的发现过程．

（4）评价反思．

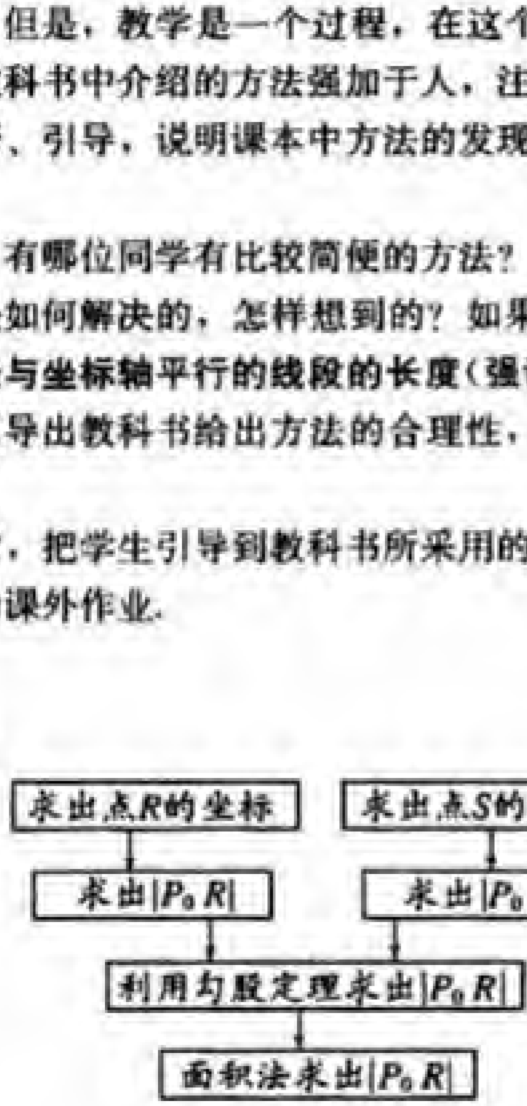
教师可以向全体同学提问：有哪位同学有比较简便的方法？

如果有，则请该同学说明是如何解决的，怎样想到的？如果没有，教师可以简要回忆建立两点间距离公式的过程：**首先求出两条与坐标轴平行的线段的长度**（强调这一点），然后利用勾股定理求出这两点间的距离（斜边长）．这样引导出教科书给出方法的合理性，说明教科书给出的方法不是凭空想出来的．

在研究如何解决这一问题时，把学生引导到教科书所采用的方法上来，把先求出直线的交点坐标，再利用两点间距离公式来求作为课外作业．

教科书的解法：

（1）理清思路，画出框图．



（2）细心演算，规范表达．

解：设 $A\neq 0$，$B\neq 0$，则直线和 x 轴及 y 轴皆相交．如图 3-16，过点 $P_0(x_0,y_0)$ 分别作 x 轴和 y 轴的平行线交直线 l 于 R 和 S，如图．则直线 P_0R 的方程为 $y=y_0$，R 的坐标为 $\left(-\frac{By_0+C}{A},\ y_0\right)$．

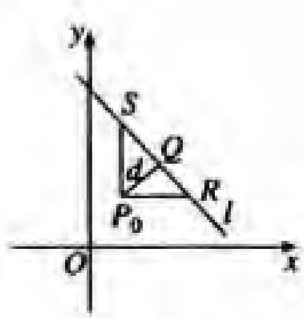


图 3-16

直线 P_0S 的方程为 $x=x_0$，S 的坐标为 $\left(x_0,\ -\frac{Ax_0+C}{B}\right)$．于是有

$$|P_0R|=\left|-\frac{By_0+C}{A}-x_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|A|},$$

$$|P_0S|=\left|-\frac{Ax_0+C}{B}-y_0\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{|B|},$$

$$|RS|=\sqrt{(PR)^2+(PS)^2}=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|AB|}|Ax_0+By_0+C|.$$

由三角形面积公式可得

$$d\cdot|RS|=|PR|\cdot|PS|.$$

于是得

$$d=\frac{|PR|\cdot|PS|}{|RS|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因此，点 $P_0(x_0,y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(5) 应用练习.

可采用学生板演，集体评价；或者同桌检查，相互评价的方式.

教科书第 114 页的练习. 例题也可以先作为练习，然后由学生或教师评讲，重点在例 6.

例 5 比较简单，是公式的直接运用.

例 6 还可以有其他方法来计算$\triangle ABC$的面积（见“教科书编写意图与教学建议”）.

(6) 应用拓展，知识外化.

若教学进程比较顺利，时间来得及，可以提出以下的思考题，把两条平行直线之间的距离问题也处理掉.

已知直线 l_1：$3x-4y-8=0$，l_2：$3x-4y+2=0$，求 l_1 与 l_2 间的距离.

解：显然，题设中的两条直线互相平行.

在直线 l_1 上取一点 $P(0,\ -2)$，P 到直线 l_2 的距离

$$d=\frac{|3\times0-4\times(-2)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2.$$

所以，l_1 与 l_2 间的距离是 2.

这道题设置的目的是：(1)只要转化为点到直线间的距离即可；(2)第 3.3.4 小节不需要 1 个课时，这样下节课就可以进入本章小结部分的教学.

(6) 小结，布置作业.

本节课解决了点到直线的距离问题，建立了点到直线的距离公式. 值得注意的是，在这个过程中，我们把斜线段长度的问题转化为两条平行于坐标轴的问题，体现了降维思想. 这种思想方法今后还要多次运用.

作业：第 116 页习题 3.3A 组第 9 题；B 组第 2，4 题.

5. 几点说明

整个教学过程，教师应该注意少讲，给学生以充分活动的时间与空间. 任务的分析，策略的确定，计划的实施，过程的评价等等，都应该注意，学生能够做的事就让他们自己去做，始终注意使得学生知识与能力的发展都得到保证.

6. 教学参考

(1) 点到直线的距离公式的其他证明方法.

见“教科书编写意图与教学建议”.

(2) 补充例题

应该说，教科书所提供的内容足以满足一堂课需求．为了满足不同层次可能的需要，提供一道补充例题：

求过点(1，2)，且与点 $A(2，3)$ 和 $B(4，-5)$ 距离相等的直线 l 的方程．

解法一：设所求直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$，即 $kx-y-k+2=0$.

由题意，得 $\dfrac{|2k-3-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|4k+5-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$.

解得 $k=-4$，或 $k=-\dfrac{3}{2}$.

当经过点(1，2)且垂直于 x 轴时，直线方程是 $x=1$，但不符合题意．

所以，所求直线 l 的方程为 $4x+y-6=0$，或 $3x+2y-7=0$.

解法二：若 A，B 两点位于直线 l 的同侧，则 $l/\!/AB$.

所以 $k_l=k_{AB}=\dfrac{-5-3}{4-2}=-4$.

又直线 l 过(1，2)，所以直线 l 的方程为

$$y-2=-4(x-1)，即 4x+y-6=0.$$

若 A，B 两点位于直线 l 的异侧，则 l 过 AB 的中点(3，-1)．

又直线 l 过(1，2)，

所以根据直线的两点式方程，得 $\dfrac{y+1}{2+1}=\dfrac{x-3}{1-3}$，即 $3x+2y-7=0$.

所以，所求直线 l 的方程为 $4x+y-6=0$，或 $3x+2y-7=0$.

六、习题解答

练习（第 110 页）

1. (1) $\left(\dfrac{36}{7}，\dfrac{4}{7}\right)$，图略；(2) (2，3)，图略．

2. (1) 直线 l_1 与 l_2 相交，交点坐标为 $\left(\dfrac{17}{16}，-\dfrac{13}{8}\right)$；

   (2) l_1 与 l_2 是同一条直线，即它们重合；

   (3) $l_1/\!/l_2$.

练习（第 112 页）

1. (1) $|AB|=8$；　(2) $|CD|=3$；　(3) $|PQ|=2\sqrt{10}$；　(4) $|MN|=\sqrt{13}$；

2. $a=\pm 8$.

练习（第 114 页）

1. (1) $2\sqrt{13}$；　(2) 0.

2. (1) $\dfrac{9}{5}$；　(2) 0（点 B 在直线 l 上）；　(3) $\dfrac{2}{5}$.

练习（第 115 页）

(1) $2\sqrt{13}$；　(2) 2.

习题 3.3　A 组

1. (1) 直线 l_1 与 l_2 相交，交点坐标为(-2，3)；

   (2) 两条直线平行；

(3) 两方程表示同一条直线.

2. (1) $A=3$, $C\neq-2$; (2) $A\neq3$; (3) $A=-\frac{4}{3}$.

3. (1) $m\neq-7$, 且 $m\neq-1$; (2) $m=-7$; (3) $m=-\frac{13}{3}$

4. 证明：设直线 l_1 与 l_2 相交于点 $P(x_0, y_0)$, 由题意得

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,$$
$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

把点 P 的坐标(x_0, y_0)代人方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 的左边，得

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0+0=0,$$

即点 P 的坐标满足方程

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

所以，点 P 在方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示的直线上.

又方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 可以整理成

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1y+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)=0,$$

这是关于 x, y 的二元一次方程，表示一条直线，

所以，方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示经过 l_1 与 l_2 交点的直线.

5. 解：经过直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点的直线方程可以写成

$$2x-3y+10+\lambda(3x+4y-2)=0, \text{ 即}$$
$$(2+3\lambda)x+(4\lambda-3)y+(10-2\lambda)=0. \quad ①$$

当且仅当 $3(2+3\lambda)-2(4\lambda-3)=0$ 时，$(2+3\lambda)x+(4\lambda-3)y+(10-2\lambda)=0$ 表示的直线与方程 $3x-2y+4=0$ 表示的直线互相垂直.

由 $3(2+3\lambda)-2(4\lambda-3)=0$ 得 $\lambda=-12$.

把 $\lambda=-12$ 代人方程①，得

$$34x+51x+34=0, \text{ 即 } 2x+3y+2=0.$$

所以，经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 $3x-2y+4=0$ 的直线方程为 $2x+3y+2=0$.

6. 解：由题设，根据两点间距离公式，有

$$|AB|=\sqrt{5}, |PQ|=\sqrt{5}, |MN|=\sqrt{(1+4)^2+(0-0)^2}=5.$$

因为 $|AB|+|PQ|<|MN|$, 所以线段 AB, PQ, MN 不能围成三角形.

7. 解：由题意，得

$$|PQ|^2=(a+2)^2+25;$$
$$|PM|^2=(a-1)^2+1.$$

由 $|PQ|=|PM|$, $|PQ|^2=|PM|^2$, 得

$$(a+2)^2+25=(a-1)^2+1.$$

解得 $a=-\frac{9}{2}$.

8. 解：(1) 依题意，设所求的点 M 的坐标是$(x, 0)$.

由 $|MA|=13$ 及 $A(5, 12)$, 得

$$(x-5)^2+(0-12)^2=13^2.$$

解得 $x=0$, 或 $x=10$.

所以，所求的点 M 有两个，它们的坐标分别是$(0, 0)$、$(10, 0)$.

(2) 依题意，设点 P 的坐标是 $(7, y)$.

由 $|PN|=10$ 及 $N(-1, 5)$，得

$$(7+1)^2+(y-5)^2=100.$$

解得 $y=-1$，或 $y=11$.

所以，所求的点 P 有两个，它们的坐标分别是 $(7, -1)$、$(7, 11)$.

9. 解：点 $P(-5, 7)$ 到直线 $12x+5y-3=0$ 的距离

$$d=\frac{|12\times(-5)+5\times7-3|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{28}{13}.$$

10. 解：在直线 $3x-2y-1=0$ 上取一点 $P(3, 4)$.

点 P 到直线 $3x-2y+1=0$ 的距离

$$d=\frac{|3\times3-2\times4+1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{2}{13}\sqrt{13}.$$

所以，平行直线 $3x-2y-1=0$ 和 $3x-2y+1=0$ 间的距离是 $\frac{2}{13}\sqrt{13}$.

B组

1. 解：解方程组

$$\begin{cases}4x+3y=10,\\ 2x-y=10\end{cases}$$

得 $x=4$，$y=-2$.

把 $x=4$，$y=-2$ 代入 $ax+2y+8=0$，得

$$4a+2\times(-2)+8=0.$$

解得 $a=-1$.

所以，当 $a=-1$ 时，三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$，$2x-y=10$ 相交于一点.

2. 解：点 $A(a, 6)$ 到直线 $3x-4y=2$ 的距离

$$d=\frac{|3a-4\times6-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3a-26|}{5}.$$

(1) 当 $d=4$ 时，由 $\frac{|3a-26|}{5}=4$，解得 $a=2$，或 $a=\frac{46}{3}$.

(2) 当 $d>4$ 时，由 $\frac{|3a-26|}{5}>4$，解得 $a<2$，或 $a>\frac{46}{3}$.

3. 证明：(1) 设 $A\neq0$，$B\neq0$. 在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上取一点 $P\left(0, -\frac{C_1}{B}\right)$.

点 P 到直线 $Ax+By+C_2=0$ 的距离

$$d=\frac{\left|A\times0+B\times\left(-\frac{C_1}{B_1}\right)+C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(2) 设 $A=0$. 则 $B\neq0$，把直线方程 $By+C_1=0$ 变形成 $y=-\frac{C_1}{B}$.

把直线方程 $By+C_2=0$ 变形成 $y=-\frac{C_2}{B}$.

它们之间的距离 $d=\left|-\frac{C_1}{B}-\left(-\frac{C_2}{B}\right)\right|=\frac{|C_1-C_2|}{B}$，也可以写成

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(3) 设 $B=0$，则 $A\neq0$，同理可得它们之间的距离

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

综上，两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4. 解：由题设可得，点 A 到直线 l 的距离

$$d_1=\frac{|a\times(-3)+(-4)+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{3|a+1|}{\sqrt{a^2+1}};$$

点 B 到直线 l 的距离

$$d_2=\frac{|a\times6+3+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|6a+4|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

由 $d_1=d_2$，得 $\dfrac{3|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|6a+4|}{\sqrt{a^2+1}}$.

解得 $a=-\dfrac{1}{3}$，或 $a=-\dfrac{7}{9}$.

5. 解：由题意，得

$$|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2};$$

直线 AB 的方程是

$$\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-1}{3-1}，即\ x-y+1=0.$$

在△PAB 中，设 AB 边上的高长为 h，由△PAB 的面积等于 10，得

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times h=10.$$

所以 $h=5\sqrt{2}$.

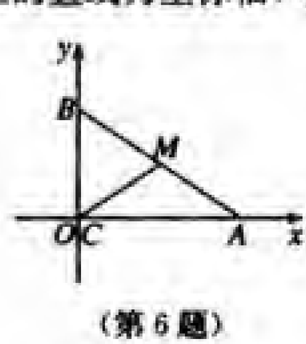
因为点 P 在 x 轴上，设 $P(x，0)$. 点 P 到直线 AB 的距离是 $\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2}}$.

所以，$\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

解得 $x=9$，或 $x=-11$.

所以，所求的点的坐标是 $(9，0)$，$(-11，0)$.

6. 证明：如图，以直角三角形的直角顶点 C 为原点，分别以直角边 OA、OB 所在的直线为坐标轴，建立坐标系.



（第 6 题）

设 $A(a，0)$，$B(0，b)$. AB 的中点为 M，则点 M 的坐标是 $\left(\dfrac{a}{2}，\dfrac{b}{2}\right)$.

$$|CM|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

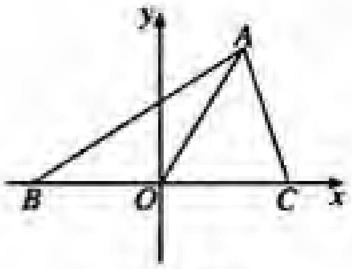
$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$，所以 $|MA|=|MB|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

所以，直角三角形斜边的中点到三顶点的距离相等.

7. 证明：如图，以 BC 边的中点为原点，直线 BC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系.

设 $C(c,0)$，$A(a,b)$，则 $B(-c,0)$.

$$|AB|^2=(a+c)^2+b^2;$$
$$|AC|^2=(a-c)^2+b^2;$$
$$|OA|^2=a^2+b^2;$$
$$|OC|^2=c^2.$$



（第 7 题）

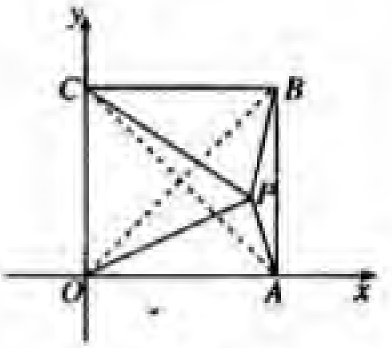
所以，
$$|AB|^2+|AC|^2$$
$$=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$2(|AO|^2+|OC|^2)=2(a^2+b^2+c^2).$$

因此，$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$.

8. 证明：在直角坐标系中，画点 $A(1,0)$，$B(1,1)$，$C(0,1)$ 三点.

设 $P(x,y)$ 是正方形 $OABC$ 内一点，则有

$$0<x<1,\ 0<y<1.$$
$$|PO|=\sqrt{x^2+y^2},|PC|=\sqrt{x^2+(1-y)^2},$$
$$|PA|=\sqrt{(1-x)^2+y^2},|PB|=\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}.$$



（第 8 题）

要证明

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant 2\sqrt{2},$$

即证明 $|PO|+|PC|+|PA|+|PB|\geqslant 2\sqrt{2}$.

连结 OB、AC. 在 $\triangle POB$ 中，有 $|PO|+|PB|\geqslant|OB|=\sqrt{2}$，当 P 在线段 AC 时等号成立；在 $\triangle PAC$ 中，有 $|PA|+|PC|\geqslant|AC|=\sqrt{2}$，当 P 在线段 AC 时等号成立.

所以，$|PO|+|PC|+|PA|+|PB|\geqslant 2\sqrt{2}$，当 P 是线段 OB 与线段 AC 的交点时等号成立，即

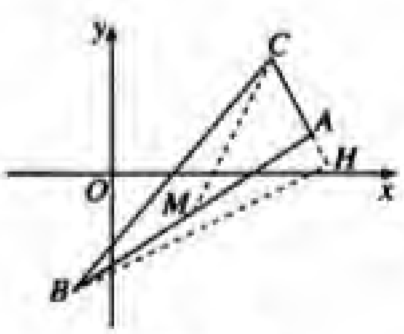
$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant 2\sqrt{2},$$

等号成立的条件是 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$.

要证明的不等式左边的式子具有明显的几何意义，因此可以先明确要证明的不等式表示的几何关系，然后加以证明.

9. 解：(1) 由题意，得直线 AC 的方程为 $2x+y-11=0$.

解方程组 $\begin{cases}2x-y-5=0,\\2x+y-11=0\end{cases}$ 得点 C 的坐标为 $(4,3)$.



（第 9 题）

(2) 解法一：设 $B(x_0,y_0)$，则 $M\left(\dfrac{x_0+5}{2},\dfrac{y_0+1}{2}\right)$.

于是有

$$x_0+5-\frac{y_0+1}{2}-5=0,\text{ 即 }2x_0-y_0-1=0.$$

与 $x_0-2y_0-5=0$ 联立，解得点 B 的坐标为 $(-1,-3)$.

于是直线 BC 的方程为 $6x-5y-9=0$.

解法二：设直线 BC 的方程为 $y-3=k(x-4)$，即

$$kx-y+3-4k=0.$$

解方程组 $\begin{cases}x-2y-5=0,\\kx-y-(4k-3)=0\end{cases}$ 得

$$x=\frac{8k-11}{2k-1},\ y=\frac{-k-3}{2k-1}.$$

因为点 M 是线段 AB 的中点，所以点 M 的坐标是$\left(\frac{9k-8}{2k-1},\ \frac{k-4}{2(2k-1)}\right)$.

把点 M 的坐标代入直线 CM 的方程，得$\frac{18k-16}{2k-1}-\frac{k-4}{2(2k-1)}-5=0$.

解得　$k=\frac{6}{5}$.

所以直线 BC 的方程为 $6x-5y-9=0$.

解法三：设 $M(x,\ y)$，则 $B(2x-5,\ 2y-1)$.

因为点 B 在直线 BH 上，所以有

$$2x-5-2(2y-1)-5=0,\ 即\ x-2y-4=0.$$

解方程组$\begin{cases}x-2y-4=0,\\2x-y-5=0\end{cases}$得

点 M 的坐标为$(2,\ -1)$，点 B 的坐标为$(-1,\ -3)$.

所以直线 BC 的方程为 $6x-5y-9=0$.

小　结

一、教科书编写意图与教学建议

小结的目的在于回顾本章学习的主要内容以及重要的数学思想方法，使得学生形成系统的知识结构.

1. 本章知识结构

教科书在第 119 页已经以框图的形式整理给出.

教学中，可以让学生沿着框图所提示的脉络把内容稍稍细化，也可以以习题为载体来复习本章所学习的内容，而不是简单地复述学习过的内容．比如

例 1　设直线 l 的斜率 k 满足$|k|<1$，指出直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

解：由$|k|<1$，知$-1<k<1$.

当 $0<k<1$ 时，倾斜角是正角，由 $0<\tan\alpha<1$，得 $0°<\alpha<45°$；

当 $-1<k<0$ 时，倾斜角是负角，由 $-1<\tan\alpha<0$，得 $135°<\alpha<180°$；

当 $k=0$ 时，倾斜角 $0°$；

综合以上，得倾斜角的范围是 $0°\leqslant\alpha<45°$，或 $135°<\alpha<180°$.

这样，既复习了直线的倾斜角是锐角时，斜率是正数；倾斜角是钝角时，斜率是负数；倾斜角是 $0°$时斜率是 0 等知识，还复习了在倾斜角是锐角时，随着倾斜角的增大，斜率也增大；在倾斜角是钝角时，随着倾斜角的增大斜率也增大．更有利于学生把握直线的斜率与倾斜角的关系.

再比如，为了复习直线方程的各种形式，可以设置如下的问题：

例 2　设直线 l 经过 $A(-2,\ 0)$，$B(0,\ 3)$两点，你能写出几种形式的直线 l 的方程？

解：可以写出点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式 5 种.

点斜式：因为直线 l 经过 A、B 两点，斜率为

$$k_{AB}=\frac{3-0}{0-(-2)}=\frac{3}{2}.$$

直线的点斜式方程是 $y=\frac{3}{2}(x+2)$.

斜截式：$y=\frac{3}{2}x+3$.

两点式：$\frac{y}{3}=\frac{x+2}{2}$.

截距式：$-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

一般式：$3x-2y+6=0$.

为了复习两条直线之间的位置关系，可以设置下列具有开放性质的题目，使直线方程中含有字母系数.

例 3 设直线 l_1 的方程是 $x+y=2$，直线 l_2 的方程是 $ax+y=1$.

当______时，l_1 与 l_2 相交；当______时，l_1 与 l_2 平行；

当______时，l_1 与 l_2 垂直. 当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，它们之间的距离是______.

分析：数形结合，画出图形（图 3-17），借助图形分析不难得到结论.

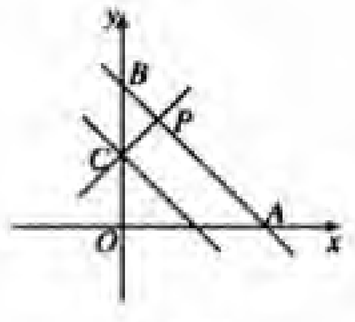


图 3-17

解：当 $a\neq1$ 时，l_1 与 l_2 相交；

当 $a=1$ 时，l_1 与 l_2 平行；

当 $a=-1$ 时，l_1 与 l_2 垂直.

当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，它们之间的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 解析几何研究的是“曲线与方程”的关系. 小结中提出了“方程 $2x+y+1=0$ 是直线 l 的方程的含义是什么?”的问题，目的是通过具体问题说明直线与方程的关系，体会这一思想. 它的含义是直线 l 上点的坐标都满足方程 $2x+y+1=0$，以方程 $2x+y+1=0$ 的解为坐标的点都在直线 l 上.

3. 用代数方法解决几何问题，数与形结合是解析几何最核心的思想方法，因此在回顾与思考时要突出这一重要的思想方法.

4. 以下关于二元一次方程组解的讨论，供教师参考，不必向学生介绍.

设两条直线的方程分别是

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0.\ (A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2 \text{ 全不为零})$$

解二元一次方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1, & ① \\ A_2x+B_2y=-C_2, & ② \end{cases}$$

并说明其几何意义.

解：①$\times B_2-$②$\times B_1$，得

$$(A_1B_2-A_2B_1)x=B_1C_2-B_2C_1. \quad ③$$

(1) 当 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$ 时，即 $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ 时，方程组有唯一解

$$\begin{cases} x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \\ y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}. \end{cases}$$

这时 l_1 与 l_2 相交，交点坐标是 $\left(\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\ \frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}\right)$.

（2）当 $A_1B_2-A_2B_1=0$ 时：

（i）如果 $B_1C_2-B_2C_1\neq 0$，这时 C_1，C_2 不能全为零.

设 $C_2\neq 0$，有 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$，方程组无解．直线 l_1 与 l_2 没有公共点，l_1 与 l_2 互相平行.

（ii）如果 $B_1C_2-B_2C_1=0$，这时 C_1，C_2 或全为零，或全不为零（当 C_1，C_2 全不为零时，$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$）．两个方程是同解方程，因此它们有无穷多解．直线 l_1 与 l_2 重合.

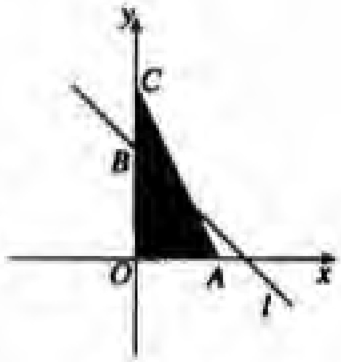
二、补充例题

1. 在直角坐标平面上，画出下列不等式组

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ 2x+y-2\leqslant 0 \end{cases}$$ 表示的区域.

若点 $M(x,\ y)$ 是上述区域内的点，计算 $b=x+y$，指出 b 的最大值与最小值，并指出 b 最大、最小时相应的点 M 的坐标.

你能说明 b 的几何意义吗？



（第 1 题）

解：题设中不等式组表示的区域如图（阴影部分）所示.

当 b 变动时，方程 $b=x+y$ 表示斜率始终为 -1，在 y 轴上的截距是 b 的一组平行直线.

当图中的点 B 位于点 $C(0,\ 2)$ 时，b 最大，最大值是 2；

当图中的点 B 位于原点 $O(0,\ 0)$ 时，b 最小，最小值是 0.

2. 过点(2，3)的直线 l 被两平行直线 l_1：$2x-5y+9=0$ 与 l_2：$2x-5y-7=0$ 所截线段 AB 的中点恰好在直线 $x-4y-1=0$ 上，求直线 l 的方程.

解：设线段 AB 的中点 P 的坐标为$(a,\ b)$．由 P 到 l_1，l_2 的距离相等，得

$\frac{|2a-5b+9|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|2a-5b-7|}{\sqrt{2^2+5^2}}$，经整理，得 $2a-5b+1=0$.

又点 P 在直线 $x-4y-1=0$ 上，所以 $a-4b-1=0$.

解方程组 $\begin{cases}2a-5b+1=0, \\ a-4b-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-3, \\ b=-1,\end{cases}$ 即点 P 的坐标为$(-3,\ -1)$.

又直线 l 过点(2，3)，所以，直线 l 的方程为 $\frac{y-(-1)}{3-(-1)}=\frac{x-(-3)}{2-(-3)}$，

即 $4x-5y+7=0$.

三、习题解答

复习参考题　A 组

1. 解：由题意可得，矩形的另一个顶点 C 的坐标是$(8,\ 5)$.

直线 OC 的方程是 $y=\frac{5}{8}x$，即 $5x-8y=0$.

直线 AB 的方程是 $\frac{x}{8}+\frac{y}{5}=1$，即 $5x+8y-40=0$.

2. 证法一：直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-3$；

直线 AC 的斜率 $k_{AC}=-3$.

所以，直线 $AB/\!/AC$.

又直线 AB 与 AC 有公共点 A，所以 A，B，C 在一直线上.

证法二：因为直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-3$，

所以，直线 AB 的方程为 $y-12=-3(x+2)$，即 $3x+y-6=0$.

把点 C 的坐标 $(4，-6)$ 代入方程 $3x+y-6=0$ 的左边，得

$3\times4+(-6)-6=0$，满足方程 $3x+y-6=0$.

所以，点 C 在直线 AB 上，即 A，B，C 三点共线.

3. 解：在 $2x-5y-10=0$ 中，令 $y=0$，得 $x=5$；令 $x=0$，得 $y=-2$.

所以，直线与 x，y 轴分别交于 $A(5，0)$，$B(0，-2)$.

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\times5\times2=5.$$

4. 解：由已知，得

$$(3a+2)(5a-2)+(1-4a)(a+4)=0.$$

解得 $a=0$，或 $a=1$.

所以，当 $a=0$，或 $a=1$ 时，两条直线垂直.

5. 解：(1) 直线 $ax-5y=9$ 的斜率 $k_1=\frac{a}{5}$；

直线 $2x-3y=15$ 的斜率 $k_2=\frac{2}{3}$.

由 $k_1=k_2$，得 $\frac{a}{5}=\frac{2}{3}$，所以 $a=\frac{10}{3}$.

因此，当 $a=\frac{10}{3}$ 时，直线 $ax-5y=9$ 与直线 $2x-3y=15$ 平行.

(2) 当 $a=0$ 时，方程 $x+2ay-1=0$ 成为 $x=1$；

方程 $(3a-1)x-ay-1=0$ 成为 $x=-1$.

它们都是垂直于 x 轴的直线，所以它们互相平行.

当 $a\neq0$ 时，直线 $x+2ay-1=0$ 的斜率 $k_1=-\frac{1}{2a}$；

直线 $(3a-1)x-ay-1=0$ 的斜率 $k_2=\frac{3a-1}{a}$.

由 $k_1=k_2$，得 $-\frac{1}{2a}=\frac{3a-1}{a}$，

解得 $a=\frac{1}{6}$.

当 $a=\frac{1}{6}$ 时，方程 $x+2ay-1=0$ 变形为 $3x+y-3=0$；方程 $(3a-1)x-ay-1=0$ 变形为 $3x+y-6=0$，它们互相平行.

综上，当 $a=0$，或 $a=\frac{1}{6}$ 时，直线 $x+2ay-1=0$ 与直线 $(3a-1)x-ay-1=0$ 平行.

(3) 方程 $2x+3y=2$ 的两边同乘以 2，得 $4x+6y=2a$.

因此，当且仅当 $a\neq\frac{3}{2}$ 时，直线 $2x+3y=a$ 与直线 $4x+6y-3=0$ 互相平行.

6. (1) 由题意，得

$$4a(1-a)+1=0,$$

解得　$a=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

所以，当 $a=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ 时，两条直线互相垂直.

(2) 由题意，得

$$2a+2a=0,$$

解得　$a=0$.

所以，当 $a=0$ 时，两条直线互相垂直.

7. 解：

$$\begin{cases}x+(1+m)y=2-m, & ①\\ 2mx+4y=-16. & ②\end{cases}$$

①×4－②×(1+m)，得

$$(m^2+m-2)x=-6(m+2). \qquad ③$$

(1) 当 $m^2+m-2\neq0$，即 $m\neq1$，且 $m\neq-2$ 时，

$$x=-\frac{6(m+2)}{(m-1)(m+2)}=-\frac{6}{m-1}.$$

把 $x=-\frac{6(m+2)}{(m-1)(m+2)}=-\frac{6}{m-1}$ 代入②，得

$$y=-\frac{m-4}{m-1}.$$

当 $m\neq1$，且 $m\neq-2$ 时，直线 l_1 与 l_2 相交于点 $\left(-\frac{6}{m-1},\ -\frac{m-4}{m-1}\right)$.

(2) 当 $m^2+m-2=0$，即 $m=1$，或 $m=-2$.

(i) 若 $m=1$，方程③无解，直线 $l_1/\!/l_2$.

(ii) 若 $m=-2$，方程③有无穷解，直线 l_1 与 l_2 重合.

8. 解：由已知，得

$$|AB|=5,\ |BC|=5,\ |CD|=5,\ |DA|=\sqrt{(4-0)^2+(1+2)^2}=5.$$

又直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-\frac{4}{3}$，直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{3}{4}$.

因为 $k_{AB}k_{BC}=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{3}{4}=-1$，所以 $AB\perp BC$.

因此，四边形 $ABCD$ 是正方形.

9. 解：由直线 $2x+y+2=0$ 与 $ax+4y-2=0$ 互相垂直，得

$$2a+4=0,\ a=-2.$$

当 $a=-2$ 时，$ax+4y-2=0$ 成为 $x-2y+1=0$.

联立两条直线的方程，得到方程组

$$\begin{cases}2x+y+2=0,\\ x-2y+1=0.\end{cases}$$

解方程组，得　$x=-1$，$y=0$.

所以，两条直线相交于点 $(-1,\ 0)$.

10. 解：由直线 $3x+4y-12=0$ 与 $ax+8y+11=0$ 平行，得

$$a=6.$$

当 $a=6$ 时，直线方程 $ax+8y+11=0$ 成为 $6x+8y+11=0$.

在直线 $3x+4y-12=0$ 上取一点 $P(0,\ 3)$.

点 P 到直线 $6x+8y+11=0$ 的距离

$$d=\frac{|6\times0+8\times3+11|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{7}{2}.$$

11. 解：设所求直线 l 的方程为 $x-y+m=0$.

直线 l 与直线 $x-y-2=0$ 的距离

$$d=\frac{|m+2|}{\sqrt{2}}.$$

由题意，得 $\frac{|m+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

解得 $m=2$，或 $m=-6$.

因此，与直线 $x-y-2=0$ 平行，且它的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线方程是 $x-y+2=0$，或 $x-y-6=0$.

12. 解：联立两条直线的方程，得到方程组

$$\begin{cases}x+y-1=0,\\3x-y+4=0.\end{cases}$$

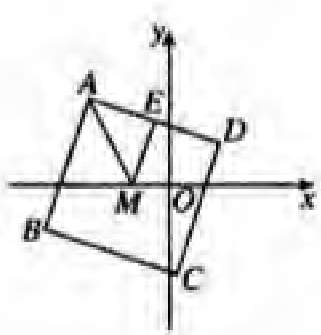
解此方程组，得 $x=-\frac{3}{4}$，$y=\frac{7}{4}$.

如图，正方形 $ABCD$ 的一个顶点是 $A\left(-\frac{3}{4},\ \frac{7}{4}\right)$.

设 $A(x_0,\ y_0)$. 由题意，点 $M(3,\ 3)$ 是线段 AC 的中点，所以

$$\frac{x_0-\frac{3}{4}}{2}=3,\ \frac{y_0+\frac{7}{4}}{2}=3.$$

解得　$x_0=\frac{27}{4}$，$y_0=\frac{17}{4}$.



（第 12 题）

由已知，直线 AD 的斜率 $k_{AD}=3$.

因为直线 $BC/\!/AD$，所以，直线 BC 的方程为

$$y-\frac{17}{4}=3\left(x-\frac{27}{4}\right)，即\ 3x-y-16=0.$$

由已知，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-1$.

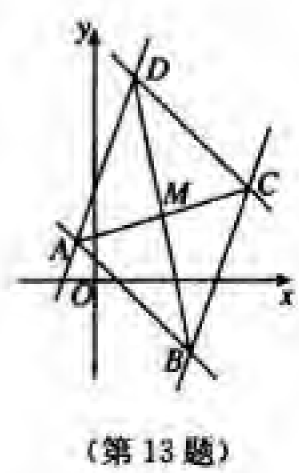
因为直线 $CD/\!/AB$，所以，直线 CD 的方程为

$$y-\frac{17}{4}=-\left(x-\frac{27}{4}\right)，即\ x+y-11=0.$$

因此，其他两边所在直线的方程是 $3x-y-16=0$，$x+y-11=0$.

13. 解：如图，过 M 作边 AD 所在直线 $x+3y-5=0$ 的垂线，垂足为 E.

$$|ME|=\frac{|(-1)+3\times0-5|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}.$$



（第 13 题）

设直线 BC 的方程为 $x+3y-m=0$，则 M 到 BC 的距离是

$$\frac{|(-1)+3\times0-m|}{\sqrt{1+3^2}}.$$

令　$\frac{|(-1)+3\times0-m|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$.

解得　$m=-1$，或 $m=5$（此时是直线 $x+3y-m=0$.）

所以，直线 BC 的方程为 $x+3y+1=0$.

因为直线 AB 与 AD 垂直，所以设它的方程为 $3x-y-n=0$.

则 M 到 AB 的距离是

$$\frac{|3\times(-1)-0-n|}{\sqrt{3^2+1}}.$$

令　$\frac{|3\times(-1)-0-n|}{\sqrt{3^2+1}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$.

解得　$n=3$，或 $n=-9$.

所以，直线 AB，CD 的方程分别为 $3x-y+9=0$，$3x-y-3=0$.

综合以上得，其余三边所在直线的方程是

$3x-y+9=0$，$x+3y+1=0$，$3x-y-3=0$.

B 组

1. 解：设点 $M(x, y)$ 与 $P(x_0, y_0)$ 关于 x 轴对称，因为点 P 在直线 $3x-4y+5=0$ 上，所以 $x_0=x$，$y_0=-y$.

把上式代入 $3x_0-4y_0+5=0$，得

$$3x+4y+5=0.$$

这就是与直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程，所以选择(B).

2. 解：设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$.

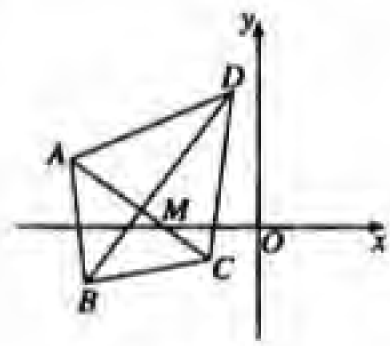
由题意，得　$|AD|^2+|BC|^2=|AB|^2+|CD|^2$.

即
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2$$
$$=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2$$

整理成　$x_1x_2+x_3x_4-x_1x_4-x_2x_3+y_1y_2+y_3y_4-y_1y_4-y_2y_3=0$.

即　$(x_3-x_1)(x_4-x_2)+(y_3-y_1)(y_4-y_2)=0$.

所以直线 AC 与 BD 垂直.



（第 2 题）

3. 证明：(1) 由题意，设与直线 l 平行的直线 l_1 的方程为

$$Ax+By+m=0.$$

因为 l_1 经过点 $M(x_0, y_0)$，所以有

$$Ax_0+By_0+m=0.$$

所以，$m=-(Ax_0+By_0)$.

把 $m=-(Ax_0+By_0)$ 代入 $Ax+By+m=0$ 得直线 l_1 的方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

(2) 设与直线 l 垂直的直线 l_2 的方程为

$$Bx-Ay+n=0.$$

因为 l_2 经过点 $M(x_0, y_0)$，所以有

$$Bx_0-Ay_0+n=0.$$

所以，$n=Ay_0-Bx_0$.

把 $n=Ay_0-Bx_0$ 代入 $Bx-Ay+n=0$ 得直线 l_2 的方程

$$Bx-Ay+Ay_0-Bx_0=0\text{，即 }B(x-x_0)=A(y-y_0).$$

因为 $A\neq0$，$B\neq0$，所以直线 l_2 的方程是

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}.$$

4. 解：把方程 $3x+2y-6=0$ 写成 $6x+4y-12=0$.

设与 $6x+4y-12=0$，$6x+4y-3=0$ 等距离的直线方程为

$$6x+4y-m=0.$$

所以，$\frac{|m-12|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{6^2+4^2}}$.

解得 $m=\frac{15}{2}$.

把 $m=\frac{15}{2}$ 代入方程 $6x+4y-m=0$，得

$$6x+4y-\frac{15}{2}=0，即 12x+8y-15=0.$$

所以，与直线 $6x+4y-12=0$，$6x+4y-3=0$ 等距离的直线方程为

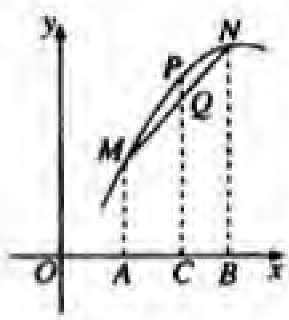
$$12x+8y-15=0.$$

5. 解：如图，依题意，点 M，N 的坐标分别为 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$. 所以，直线 MN 的方程是

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)，其中 a\leqslant x\leqslant b.$$

因为 $a\leqslant c\leqslant b$，所以，当 $x=c$ 时，有

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$



（第 5 题）

因为在 $x=a$，$x=b$ 之间的一段图象可以近似地看成直线，所以有

$$f(c)\approx f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a),$$

即 $f(c)$ 的近似值是 $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$.

6. 解：如图，过点 C 作直线 AB 的垂线 CH，垂足为 H.

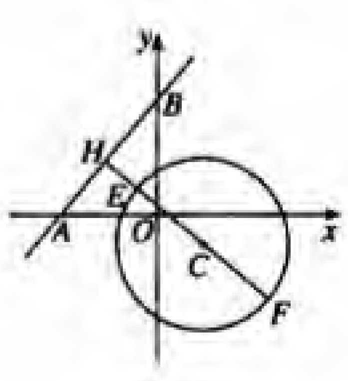
直线 CH 与以 C 为圆心，9 为半径长的圆的交点 E，F 分别是机器人到直线 AB 的最近距离点与最远距离点.

由已知，直线 AB 的方程是

$$12x-10y+120=0，即 6x-5y+60=0.$$

点 $C(5, -3)$ 到直线 AB 的距离

$$d=\frac{|6\times5-5\times(-3)+60|}{\sqrt{6^2+5^2}}=\frac{105}{\sqrt{61}}.$$



（第 6 题）

机器人到直线 AB 的最近距离是 $\frac{105\sqrt{61}}{61}-9$；

机器人到直线 AB 的最远距离是 $\frac{105\sqrt{61}}{61}+9$.

7. 证明：设 $A(a, b)$、$B(c, d)$、$C(p, q)$，则

$$|AB|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2},$$
$$|AC|=\sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2},$$
$$|BC|=\sqrt{(c-p)^2+(b-q)^2}.$$

因为对于平面上的三点 A，B，C 总有 $|AC|+|BC|\geqslant|AB|$，

所以 $\sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2}+\sqrt{(c-p)^2+(b-q)^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

本题之所以能够转化为几何问题，利用几何结论来证明，是因为要证明的不等式中式子具有明显的几何意义.

8. 解：如图，设直线 l 夹在直线 l_1，l_2 之间的线段是 AB，且 AB 被点 $P(3,0)$ 平分. 设点 A，B 的坐标分别是 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，所以

$$x_1+x_2=6,\ y_1+y_2=0.$$

于是

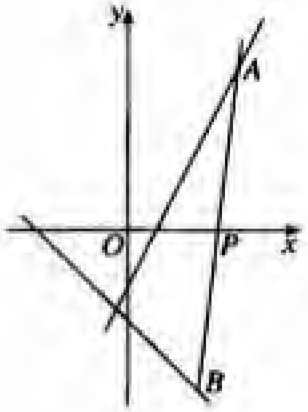
$$x_2=6-x_1,\ y_2=-y_1.$$

由于点 A，B 分别在直线 l_1，l_2 上，所以

$$\begin{cases}2x_1-y_1-2=0,\\(6-x_1)+(-y_1)+3=0.\end{cases}$$

解得

$x_1=\dfrac{11}{3}$，$y_1=\dfrac{16}{3}$，即点 A 的坐标是 $\left(\dfrac{11}{3},\dfrac{16}{3}\right)$.



（第 8 题）

直线 PA 的方程为 $\quad\dfrac{y-0}{\dfrac{16}{3}-0}=\dfrac{x-3}{\dfrac{11}{3}-3}$，

即 $\ 8x-y-24=0$.

所以，直线 l 的方程是 $8x-y-24=0$.

9. 证明：以线段 BC 的中点为原点，直线 BC 为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系.

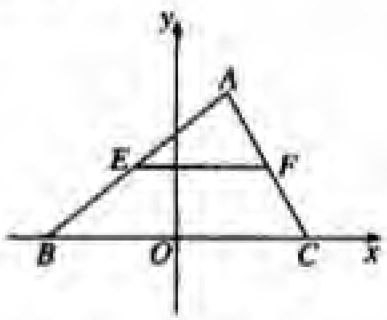
设 $A(a,b)$，$C(c,0)$，则 $B(-c,0)$.

AB 的中点 E 的坐标是 $\left(\dfrac{a-c}{2},\dfrac{b}{2}\right)$，

AC 的中点 F 的坐标是 $\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b}{2}\right)$.

$$|EF|=\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2}=|c|;$$

$|BC|=2|c|$. 所以，$|EF|=\dfrac{1}{2}|BC|$.



（第 9 题）

又 E，F 的纵坐标相同，所以 $EF\parallel BC$.

综合以上，得三角形两边中点所连线段平行于第三边且等于第三边的一半.

III 自我检测题

一、选择题.

1. 已知 $A(-1,0)$、$B(5,6)$、$C(3,4)$ 在同一直线上，则 $\dfrac{|AC|}{|CB|}=$（　　）

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 3　　(D) 2

2. 直线 $3x+\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角的大小是(　　)

(A) 30°　　(B) 60°　　(C) 120°　　(D) 135°

3. 若三直线 $2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$ 和 $x+ky=0$ 相交于一点，则 $k=$(　　)

(A) -2　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

4. 如果 $AB>0$，$BC>0$，那么直线 $Ax-By-C=0$ 不经过的象限是(　　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

5. 已知直线 l_1 和 l_2 夹角的平分线所在直线的方程为 $y=x$，如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0(ab>0)$，那么 l_2 的方程是(　　)

(A) $bx+ay+c=0$　　(B) $ax-by+c=0$

(C) $bx+ay-c=0$　　(D) $bx-ay+c=0$

二、填空题.

1. 原点 O 在直线 l 上的射影为点 $H(-2,1)$，则直线 l 的方程为__________.

2. 经过点 $P(-3,-4)$，且在 x 轴、y 轴上的截距相等的直线 l 的方程是__________.

3. 两直线 $(m+2)x-y+m=0$，$x+y=0$ 与 x 轴相交且能构成三角形，则 m 满足的条件是__________.

三、解答题.

1. 求经过直线 l_1：$3x+4y-5=0$ 与直线 l_2：$2x-3y+8=0$ 的交点 M，且满足下列条件的直线方程：(1) 经过原点；(2) 与直线 $2x+y+5=0$ 平行；(3) 与直线 $2x+y+5=0$ 垂直.

2. 直线 $x+m^2y+6=0$ 与直线 $(m-2)x+3my+2m=0$ 没有公共点，求实数 m 的值.

3. 证明：等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

自我检测题参考解答

一、选择题.

题号	1	2	3	4	5
答案	D	C	B	B	A

说明：1. 本题主要考查两点间距离公式的应用. 但是，画出图形分析，并作出 A，B，C 在 x 轴上的投影 A'，B'，C'，可以发现 $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|A'C'|}{|C'B'|}$，即 $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|A'C'|}{|C'B'|}=\frac{|x_C-x_A|}{|x_B-x_C|}=\frac{|3-(-1)|}{|5-3|}=2$. 因此只要考虑横坐标之间的关系即可.

2. 本题主要考查根据斜率求倾斜角.

3. 本题主要考查坐标法的思想，解方程组求直线的交点.

4. 本题主要考查直线一般式方程中系数对直线位置的影响，加强数形结合.

5. 本题主要考查互为反函数的函数图象间的关系.

二、填空题.

1. 本题主要考查画出图形，分析关系，写出直线的点斜式方程.

解：直线 OH 的斜率为 $-\frac{1}{2}$. 直线 l 经过点 H，且与 OH 垂直，所以直线 l 的方程为 $y-1=$

$2(x+2)$，即 $2x-y+5=0$.

2. 本题主要考查截距的概念以及分类讨论的方法.

解：(1) 当直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距都等于零时，方程为 $4x-3y=0$.

(2) 当直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距不等于零时，设直线 l 的方程为 $x+y=a$. 由 l 经过点 P，得 $a=-7$，直线 l 的方程为 $x+y+7=0$. 所以符合条件的直线 l 的方程是 $x+y+7=0$，或 $4x-3y=0$.

3. 本题考查数形结合，根据几何关系找出相应的代数结论.

解：画出直线 $x+y=0$. 显然直线 $x+y=0$ 与 x 轴相交于原点 $(0, 0)$. 由于 $(m+2)x-y+m=0$ 不能经过原点，所以 $m\neq 0$；$(m+2)x-y+m=0$ 与 x 轴不能平行，所以 $m+2\neq 0$，$m\neq -2$；直线 $(m+2)x-y+m=0$ 与直线 $x+y=0$ 不能平行，所以 $m+2\neq -1$，$m\neq -3$.

综合以上得，m 满足的条件是 $m\neq -2$，$m\neq -3$，且 $m\neq 0$.

三、解答题.

1. 本题主要考查求两条直线的交点坐标，根据直线之间的关系写出直线的方程. 另外，本题也可以用直线系方程来解.

解：解方程组 $\begin{cases}3x+4y-5=0,\\ 2x-3y+8=0\end{cases}$ 得 $x=-1$，$y=2$.

直线 l_1 与 l_2 的交点是 $M(-1, 2)$.

(1) 经过点 $M(-1, 2)$ 与原点的直线方程是 $2x+y=0$.

(2) 经过点 $M(-1, 2)$ 且与直线 $2x+y+5=0$ 平行的直线方程为

$$2(x+1)+(y-2)=0，即 2x+y=0.$$

(3) 经过点 $M(-1, 2)$ 与直线 $2x+y+5=0$ 垂直的直线方程为

$$(x+1)-2(y-2)=0，即 x-2y+5=0.$$

2. 本题主要考查通过对含参数的方程的讨论，正确判断两条直线间的位置关系.

解：由已知，题设中的两直线互相平行.

当 $m\neq 0$ 时，$\frac{m-2}{1}=\frac{3m}{m^2}\neq\frac{2m}{6}$. 由 $\frac{m-2}{1}=\frac{3m}{m^2}$，得 $m=3$，或 $m=-1$；

由 $\frac{3m}{m^2}\neq\frac{2m}{6}$，得 $m\neq\pm 3$，所以 $m=-1$.

当 $m=0$ 时，两直线方程分别为 $x+6=0$，$-2x=0$，即 $x=-6$，$x=0$，两直线也没有公共点.

综合以上知，当 $m=-1$，或 $m=0$ 时，两直线没有公共点.

3. 本题主要考查用坐标法证明几何问题.

证明：建立如图所示的直角坐标系. 设 $A(a, 0)$，$B(0, b)$，$C(-a, 0)$，其中 $a>0$，$b>0$. 则直线 AB 的方程为 $bx+ay-ab=0$，

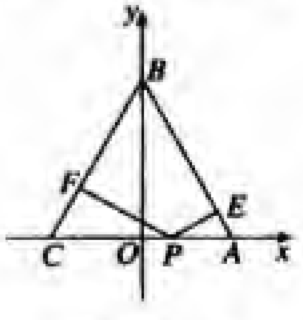
直线 BC 的方程为 $bx-ay+ab=0$.

设底边 AC 上任意一点为 $P(x, 0)$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$，

则 P 到 AB 的距离 $|PE|=\frac{|bx-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

P 到 BC 的距离 $|PF|=\frac{|bx+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

A 到 BC 的距离 $h=\frac{|ba+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



（第3题）

因为 $|PE|+|PF|=\frac{b(a-x)}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=h$，

所以，结论成立.

IV 拓展资源

一、习题扩充

1. 已知点 $P(-4, 2)$，直线 l：$3x-2y-7=0$. 求：

(1) 过点 P 且与 l 平行的直线的方程；

(2) 过点 P 且与 l 垂直的直线的方程.

解：(1) 与直线 l：$3x-2y-7=0$ 平行的直线可写成 $3x-2y+m=0$，

由直线过点 $P(-4, 2)$，则 $m=16$.

过点 P 且与 l 平行的直线方程为 $3x-2y+16=0$.

(2) 与 l 垂直的直线方程可写为 $2x+3y+m=0$.

由直线过点 $P(-4, 2)$，则 $m=2$.

过点 P 且与 l 平行的直线方程为 $2x+3y+2=0$.

2. 已知直线 l 与直线 $2x+5y-1=0$ 平行，且与坐标轴围成的三角形面积为 5，求直线 l 的方程.

解：依题意，设直线 l 的方程为 $2x+5y+m=0$，它与 x，y 轴的交点分别为

$$\left(-\frac{m}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{m}{5}\right).$$

由已知条件得 $\frac{1}{2}\left|-\frac{m}{2}\right|\times\left|-\frac{m}{5}\right|=5$，解得 $m=\pm10$.

所以，直线 l 的方程为 $2x+5y\pm10=0$.

3. 求过两直线 l_1：$7x-8y-1=0$ 和 l_2：$2x+17y+9=0$ 的交点，且平行于直线 $2x-y+7=0$ 的直线方程.

解：设过 l_1，l_2 交点的直线方程为

$$7x-8y-1+\lambda(2x+17y+9)=0. \qquad ①$$

整理得
$$(7+2\lambda)x+(-8+17\lambda)y+9\lambda-1=0.$$

由于上述直线与直线 $2x-y+7=0$ 平行，

所以有 $\frac{7+2\lambda}{2}=\frac{-8+17\lambda}{-1}\neq\frac{9\lambda-1}{7}$，解得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

把 $\lambda=\frac{1}{4}$ 代入①得，所求直线的方程为 $6x-3y+1=0$.

4. 求斜率为 $\frac{3}{4}$，且与坐标轴所围成的三角形的周长是 12 的直线方程.

解：设直线的方程为 $y=\frac{3}{4}x+b$.

令 $x=0$，得 $y=b$；令 $y=0$，得 $x=-\frac{4}{3}b$.

由题意，得$|b|+|-\frac{4}{3}b|+\sqrt{b^2+\left(-\frac{4}{3}b\right)^2}=12$.

解得　$b=\pm3$.

所以，所求的直线是 $y=\frac{3}{4}x\pm3$，即 $3x-4y\pm12=0$.

说明：本题也可用直线的截距式方程来解.

5. 已知直线 l_1：$mx+8y+n=0$ 与 l_2：$2x+my-1=0$ 互相平行，且 l_1，l_2 之间的距离为$\sqrt{5}$，求直线 l_1 的方程.

解：因为 $l_1 /\!/ l_2$，所以$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}$，

解得 $\begin{cases}m=4,\\n\neq-2;\end{cases}$ 或$\begin{cases}m=-4,\\n\neq2.\end{cases}$

当 $m=4$ 时，直线 l_1 的方程是 $4x+8y+n=0$，把 l_2 的方程写成 $4x+8y-2=0$. 两平行线间的距离为$\frac{|n+2|}{\sqrt{16+64}}$.

由已知，得$\frac{|n+2|}{4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

解得　$n=-22$，或 $n=18$.

所以，所求直线 l_1 的方程为 $2x+4y-11=0$，或 $2x+4y+9=0$.

(2) 当 $m=-4$ 时，直线 l_1 的方程为 $4x-8y-n=0$，把 l_2 的方程写成 $4x-8y-2=0$. 两平行线距离为$\frac{|n-2|}{\sqrt{16+64}}$.

由已知，得$\frac{|n-2|}{4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

解得　$n=-18$，或 $n=22$.

所以，所求直线 l_1 的方程为 $2x-4y+9=0$，或 $2x-4y-11=0$.

6. 已知正方形的中心为直线 $2x-y+2=0$ 和 $x+y+1=0$ 的交点，正方形一边所在直线的方程为 $x+3y-5=0$，求其他三边所在直线的方程.

解：由方程组$\begin{cases}2x-y+2=0,\\x+y+1=0\end{cases}$

解得　$x=-1$，$y=0$.

所以，该正方形的中心为$(-1, 0)$.

设所求正方形相邻两边方程为 $3x-y+p=0$ 和 $x+3y+q=0$.

因为中心$(-1, 0)$到四边距离相等，

所以
$$\frac{|-3+p|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}},$$

解得　$p_1=-3$，或 $p_2=9$；

又
$$\frac{|-1+q|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}},$$

解得　$q_1=-5$，或 $q_2=7$.

所以，其他三边所在直线方程分别为 $3x-y-3=0$，$3x-y+9=0$，$x+3y+7=0$.

7. 过点 $P(1, 2)$的直线 l 被两平行线 l_1：$4x+3y+1=0$ 与 l_2：$4x+3y+6=0$ 截得的线段长$|AB|=\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

解：设 l_1 的方程为 $y-2=k(x-1)$.

由$\begin{cases}y=kx+2-k,\\4x+3y+1=0\end{cases}$ 解得 $A\left(\dfrac{3k-7}{3k+4},\ \dfrac{-5k+8}{3k+4}\right)$；

由$\begin{cases}y=kx+2-k,\\4x+3y+6=0\end{cases}$ 解得 $B\left(\dfrac{3k-12}{3k+4},\ \dfrac{8-10k}{3k+4}\right)$.

因为 $|AB|=\sqrt{2}$，所以$\sqrt{\left(\dfrac{5}{3k+4}\right)^2+\left(\dfrac{5k}{3k+4}\right)^2}=\sqrt{2}$，

整理，得 $7k^2-48k-7=0$，解得 $k_1=7$，或 $k_2=-\dfrac{1}{7}$.

因此，所求直线 l 的方程为 $x+7y-15=0$，或 $7x-y-5=0$.

8. 已知 $A(0,\ 3)$，$B(-1,\ 0)$，$C(3,\ 0)$，试求点 D 的坐标，使四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.

解：设所求点 D 坐标为 $(x,\ y)$.

(1) 若 $AD/\!/BC$，$|AB|=|CD|$，则

$$\begin{cases}y=3,\\\sqrt{(0+1)^2+(3+0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$ (不合题意).

(2) 若 $AB/\!/CD$，$|BC|=|AD|$，则

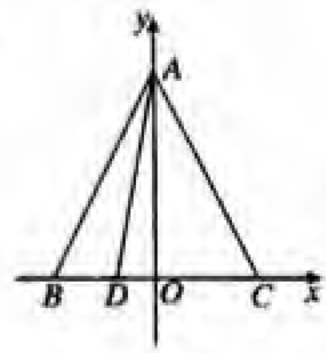
$$\begin{cases}\dfrac{y-0}{x-3}=\dfrac{3-0}{0+1},\\\sqrt{(-1-3)^2+0^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}.\end{cases}$$

解方程组，得$\begin{cases}x=\dfrac{16}{5},\\y=\dfrac{3}{5};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$ (不合题意).

综合以上，得点 D 的坐标为 $(2,\ 3)$，或 $\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$.

9. 如图，已知点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的点，且 $AB^2=AD^2+BD\cdot DC$. 求证 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

解：取 BC 边所在的直线为 x 轴，BC 上的高为 y 轴，建立如图所示的坐标系.



(第 9 题)

设 $A(0,\ a)$，$B(b,\ 0)$，$C(c,\ 0)$，$D(d,\ 0)$.

由已知，$AB^2=AD^2+BD\cdot DC$，

所以，$a^2+b^2=c^2+d^2+(d-b)(c-d)$.

所以，$(b+c)(b-d)=0$.

因为 $b\neq d$，所以 $b=-c$.

即 O 是 BC 的中点，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

10. 设 $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}$. 求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

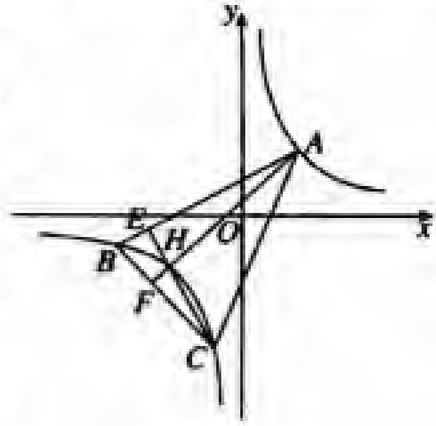
分析：联想两点间的距离公式，转化为几何问题.

证明：设 $A(a,\ b)$，$B(c,\ d)$，则有

$$\sqrt{a^2+b^2}=|OA|,\ \sqrt{c^2+d^2}=|OB|,\ \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=|AB|.$$

问题转化为证明 $|OA|+|OB|\geqslant|AB|$.

由平面几何知，$|OA|+|OB|\geq|AB|$，等号在 A，O，B 共线，且 O 在 A，B 之间时成立．对于不等式，等号成立的条件是 $bc=ad$，且 a、c 异号．



（第 11 题）

11．已知$\triangle ABC$的三个顶点都在反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上．借助信息技术画出它的垂心 H（三边上的高的交点），H 是否也在这个图象上？证明你的结论．

解：H 在这个图象上．设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$．因为它们都在函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上，所以有 $x_iy_i=1$（$i=1,\ 2,\ 3$）．

过顶点 C 作 AB 的垂线，垂足为 E．过顶点 A 作 BC 的垂线，垂足为 F．CE，AF 交于 H，H 就是$\triangle ABC$的垂心．

因为直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，所以，直线 CE 的方程为

$$y-y_3=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-x_3)，即$$

$$(x_2-x_1)(x-x_3)+(y_2-y_1)(y-y_3)=0. \qquad ①$$

同理，直线 AF 的方程为

$$(x_3-x_2)(x-x_1)+(y_3-y_2)(y-y_1)=0. \qquad ②$$

联立①、②，解得

$$x=-\frac{1}{x_1x_2x_3}，\ y=-x_1x_2x_3.$$

即 $H\left(-\dfrac{1}{x_1x_2x_3},\ -x_1x_2x_3\right)$．点 H 的坐标满足 $y=\dfrac{1}{x}$，所以，$\triangle ABC$的垂心 H 也在这个图象上．

二、知识拓展——中心对称与轴对称

（1）中心对称：与点 $A(x,\ y)$ 关于点 $M(a,\ b)$ 对称的点的坐标是 $A'(2a-x,\ 2b-y)$；与曲线 $f(x,\ y)=0$ 关于点 $M(a,\ b)$ 对称的曲线方程为 $f(2a-x,\ 2b-y)=0$．

（2）轴对称：设 $M(x_0,\ y_0)$ 与点 $M'(x',\ y')$ 关于直线 l：$Ax+By+C=0$（A，B 不全为零）对称，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}\cdot\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1，（由 MM'\perp l）\\ A\cdot\dfrac{x'+x_0}{2}+B\cdot\dfrac{y'+y_0}{2}+C=0.（由 MM' 的中点在直线 l 上）\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x'=\dfrac{(B^2-A^2)x_0-2ABy_0-2AC}{A^2+B^2}，\\ y'=\dfrac{(B^2-A^2)y_0-2ABx_0-2AC}{A^2+B^2}.\end{cases}$$

特别地，当 $A=B$，$C=0$ 时，$x'=-y_0$，$y'=-x_0$，即与点 $M(x,\ y)$ 关于 $x+y=0$ 对称的点是 $M'(-y,\ -x)$．与曲线 $f(x,\ y)=0$ 关于直线 $x+y=0$ 对称的曲线方程是 $f(-y,\ -x)=0$．

当 $A=-B$，$C=0$ 时，$x'=y_0$，$y'=x_0$，即与点 $M(x,\ y)$ 关于直线 $x-y=0$ 对称的点是 $M'(y,\ x)$．与曲线 $f(x,\ y)=0$ 关于 $x-y=0$ 对称的曲线方程是 $f(y,\ x)=0$．

当 $A=\pm B$，$C\neq0$ 时，$x'=-\dfrac{By_0+C}{A}$，$y'=-\dfrac{Bx_0+C}{A}$，于是，与点 $M(x,\ y)$ 关于直线 $x+y+b$

$=0$ 对称的点是 $M'(-b-y,\ -x-b)$. 与曲线 $f(x,\ y)=0$ 关于直线 $x+y+b=0$ 对称的曲线方程是 $f(-y-b,\ -x-b)=0$.

例 1 求点 $A(-2,\ 3)$关于直线 l：$3x-y-1=0$ 对称的点 A'的坐标.

解法一：写出 AA'的方程，求出 AA'与 l 的交点，转化为点的对称问题. 由题意，直线 AA'的方程为 $y-3=-\frac{1}{3}(x+2)$，与 $3x-y-1=0$ 联立解得它们的交点的坐标为 $P(1,\ 2)$.

因为 A，A'关于 l 对称，也关于 P 对称，所以 $A'(2\times1-(-2),\ 2\times2-3)$，即 $A'(4,\ 1)$.

解法二：利用 $AA'\perp l$，且 AA'的中点在 l 上得到两个方程，解出 A'的坐标. 设 $A'(x_0,\ y_0)$，由题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{y_0-3}{x_0+2}\times3=-1,\\[2mm] 3\times\dfrac{x_0-2}{2}-\dfrac{y_0+3}{2}-1=0.\end{cases}$$

解得 $x_0=4$，$y_0=1$.

所以，点 A 关于 l 对称的点为 $A'(4,\ 1)$.

解法三：写出 AA'的垂直平分线的方程，利用它与 l 重合，求出 A'的坐标.

设所求点 A'的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，这样线段 AA'的垂直平分线的方程是

$$y-\frac{y_0+3}{2}=-\frac{x_0+2}{y_0-3}\left(x-\frac{x_0+2}{2}\right).$$

经整理得 $2(x_0+2)x+2(y_0-3)y-(x_0^2+y_0^2-13)=0$.

此方程即为直线 l 的方程. 于是

$$\frac{2(x_0+2)}{3}=\frac{2(y_0-3)}{-1}=-\frac{x_0^2+y_0^2-13}{-1},$$

解得 $\begin{cases}x_0=4,\\ y_0=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-2,\\ y_0=3.\end{cases}$

所以，点 A 关于 l 对称的点为 $A'(4,\ 1)$.

例 2 光线自点 $A(-3,\ 3)$ 射出，经 x 轴反射以后经过点 $B(2,\ 5)$，求光线自点 A 到 B 所经过的路程.

解：根据光的性质，可以看作光线是直接由点 $A'(-3,\ -3)$射到点 $B(2,\ 5)$的. 由两点间距离公式，得

$$|AA'|=\sqrt{(-3-2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{89}.$$

光线经过的路程是 $\sqrt{89}$.

说明：与光线有关的问题可以用对称法.

例 3 已知点 $M(-3,\ 5)$，$N(2,\ 15)$. 在直线 l：$3x-4y+4=0$ 上找一点 P，使 $|PM|+|PN|$最小，并求出最小值.

解：如图 1，由平面几何知，先作出与点 M 关于 l 对称的点 M'，连结 NM'，直线 NM'与直线 l 的交点 P 即为所求. 事实上，若点 P'是 l 上异于 P 的点，则 $|P'M|+|P'N|=|P'M'|+|P'N|>|NM'|=|PM|+|PN|$.

设与 $M(-3,\ 5)$关于 l 对称的点是 M'.

因为 $k_l=\frac{3}{4}$，　　所以 $k_{MM'}=-\frac{4}{3}$.

所以，MM'的方程为 $y-5=-\frac{4}{3}(x+3)$，

即　$4x+3y-3=0$.

解方程组 $\begin{cases}3x-4y+4=0,\\4x+3y-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$

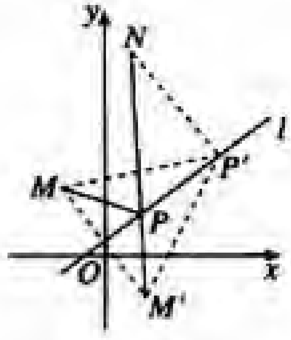


图 1

所以，线段 MM' 交直线 l 于 $Q(0, 1)$.

所以，Q 是 MM' 的中点，所以，M' 的坐标为 $(3, -3)$.

连结 $M'N$ 的直线方程为　$18x+y-51=0$.

解方程组 $\begin{cases}18x+y-51=0,\\3x-4y+4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{8}{3},\\y=3.\end{cases}$

所以点 P 坐标为 $\left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$.

此时，

$$\begin{aligned}|PM|+|PN|&=|PM'|+|PN|=|NM'|\\&=\sqrt{(3-2)^2+(15+3)^2}=5\sqrt{13}.\end{aligned}$$

所以，所求点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$，$|PM|+|PN|$ 的最小值为 $5\sqrt{13}$.

说明：①当 M、N 位于 l 的两侧时，可在 l 上找一点，使 $||PM|-|PN||$ 最大. ②本题若不用求对称点的方法来解，就比较麻烦. 解法如下：

设 $P(x, y)$ 是直线 l：$3x-4y+4=0$ 上的点，则有　$y=\dfrac{3}{4}x+1$.

$$\begin{aligned}&|PM|+|PN|=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-15)^2}\\&=\sqrt{(x+3)^2+\left(\frac{3}{4}x-4\right)^2}+\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{3}{4}x-14\right)^2}\\&=\frac{5}{4}\left[\sqrt{x^2+16}+\sqrt{(x-8)^2+64}\right]\\&=\frac{5}{4}\left[\sqrt{x^2+(-4)^2}+\sqrt{(x-8)^2+8^2}\right]\\&\geqslant\frac{5}{4}\sqrt{(x-x+8)^2+(-4-8)^2}\\&=5\sqrt{13}.\end{aligned}$$

在 $\dfrac{x}{-4}=\dfrac{x-8}{8}$，即 $x=\dfrac{8}{3}$ 时，等号成立. 此时 $y=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{8}{3}+1=3$.

所以，所求点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$，$|PM|+|PN|$ 的最小值为 $5\sqrt{13}$.

这里使用了不等式 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

例 4　已知 $\triangle ABC$ 中，顶点 $A(2, 1)$，$B(-1, -1)$，$\angle C$ 的平分线的方程是 $x+2y-1=0$. 求顶点 C 的坐标.

解：如图 2，作与 A 关于直线 l 对称的点 A'，因为 l 平分 $\angle ACB$，所以点 A' 必在直线 CB 上，这样可以先求出点 A' 的坐标，然后求出 BA' 的方程，从而求出点 C 的坐标.

设与 $A(2, 1)$ 关于直线 $x+2y-1=0$ 对称的点为 $A'(x', y')$，所以有

$$\begin{cases}\dfrac{y'-1}{x'-2}=2,\\\dfrac{x'+2}{2}+2\times\dfrac{y'+1}{2}-1=0.\end{cases}$$

解得　$x'=\dfrac{4}{5}$，$y'=-\dfrac{5}{7}$.

所以，BA'的方程为 $2x+9y+11=0$.

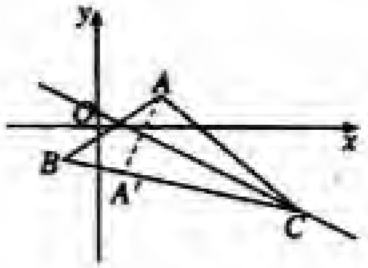


图 2

解方程组

$$\begin{cases}2x+9y+11=0,\\ x+2y-1=0\end{cases} \text{得}\quad x=\frac{31}{5},\ y=-\frac{13}{5}.$$

所以，点 C 的坐标为$\left(\frac{31}{5},\ -\frac{13}{5}\right)$.

说明：与角平分线有关的问题可以考虑用对称的方法.

练　习

1. 求直线 $4x-y-1=0$ 关于点 $P(-3,\ 4)$ 对称的直线的方程.

解：设所求直线上任意一点为$(x,\ y)$，则它关于点 $P(-3,\ 4)$ 对称的点$(-6-x,\ 8-y)$在直线 $4x-y-1=0$ 上，于是

$$4\times(-6-x)-(8-y)-1=0,\ \text{即}\ 4x-y+33=0.$$

所以，直线 $4x-y-1=0$ 关于点 $P(-3,\ 4)$对称的直线的方程为 $4x-y+33=0$.

2. 求点 $P(-3,\ 4)$关于直线 $4x-y-1=0$ 的对称点的坐标.

解：设所求的点为 $Q(a,\ b)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{b-4}{a+3}\cdot 4=-1,\\ 4\cdot\dfrac{a-3}{2}-\dfrac{b+4}{2}-1=0.\end{cases}\ \text{解得}\begin{cases}a=5,\\ b=2.\end{cases}$$

所求点的坐标为(5，2).

第四章 圆与方程

I 总体设计

解析几何是 17 世纪数学发展的重大成果之一，其本质是用代数方法研究图形的几何性质，体现了数形结合的重要数学思想．本章将学习在平面直角坐标系中建立圆的代数方程，运用代数方法研究直线与圆、圆与圆的位置关系，了解空间直角坐标系．在这个过程中进一步体会数形结合的思想，形成用代数方法解决几何问题的能力．

一、课程与学习目标

1. 课程目标

《普通高中数学课程标准（实验）》指出：在平面解析几何初步的教学中，教师应帮助学生经历如下的过程：首先将几何问题代数化，用代数的语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题；分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题．这种思想应贯穿平面解析几何教学的始终，帮助学生不断地体会“数形结合”的思想方法．

2. 学习目标

（1）圆与方程

① 回顾确定圆的几何要素，在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程与一般方程．

② 能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系．

③ 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题．

（2）在平面解析几何初步的学习过程中，体会用代数方法处理几何问题的思想．

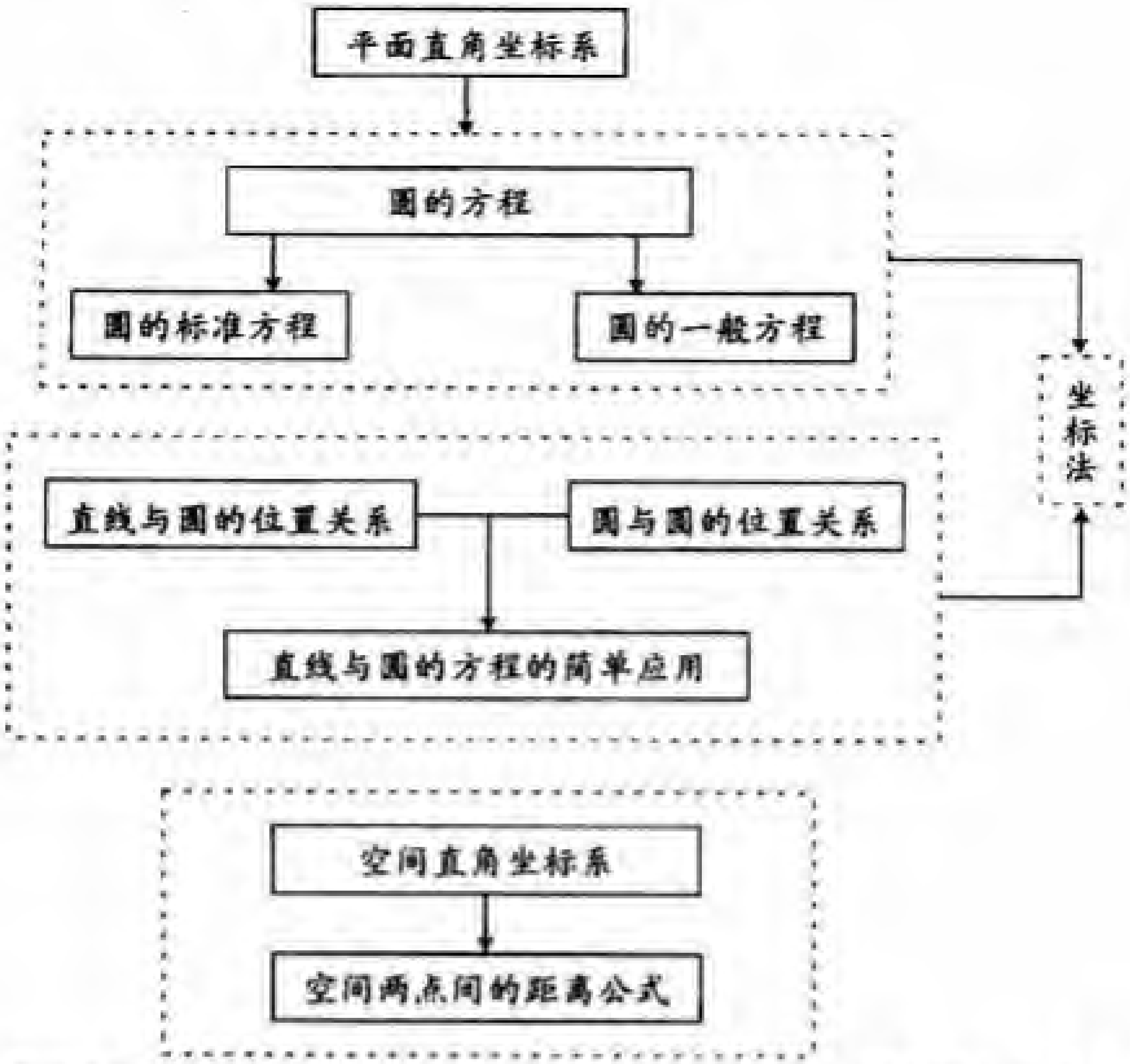
（3）空间直角坐标系

① 通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性，了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置．

② 通过表示特殊长方体（所有棱分别与坐标轴平行）顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式．

二、内容安排

本章知识结构如下图所示．



这里主要分成三大部分，圆的标准方程与一般方程；直线与圆、圆与圆的位置关系；空间直角坐标系以及空间两点间的距离公式.

在“第三章 直线与方程”中我们学习了直线方程的各种形式，运用方程研究直线之间的位置关系，以及直线与直线间位置关系的简单应用．这一章是在前一章的基础上，学习圆的有关知识——圆的标准方程、圆的一般方程以及继续运用坐标法研究直线与圆、圆与圆的位置关系等几何问题．本章还要学习空间直角坐标系的有关知识，以便为今后用坐标法研究空间的几何对象奠定基础．这些知识是进一步学习圆锥曲线方程、导数和微积分的基础.

1．通过方程，研究直线与圆、圆与圆的位置关系是本章的主要内容之一．判断直线与圆、圆与圆的位置关系可以从两个方面入手：

（1）曲线 C_1 与 C_2 有无公共点，等价于由它们的方程组成的方程组有无实数解．方程组有几组实数解，曲线 C_1 与 C_2 就有几个公共点；方程组没有实数解，C_1 与 C_2 就没有公共点.

（2）运用平面几何知识，把直线与圆、圆与圆位置关系的结论转化为相应的代数结论.

2．坐标法不仅是研究几何问题的重要方法，而且是一种广泛应用于其他领域的重要数学方法．通过坐标系，把点和坐标、曲线和方程联系起来，实现了形和数的统一．因此，在教学过程中，要始终贯穿坐标法这一重要思想，不怕反复．从另一方面讲，这一章仅仅是学习坐标法的一个延续，今后在选修系列 1-1、2-1 中的“圆锥曲线与方程”等章节还要进一步学习．但坐标法的基本思想和步骤在这一章中应该初步形成.

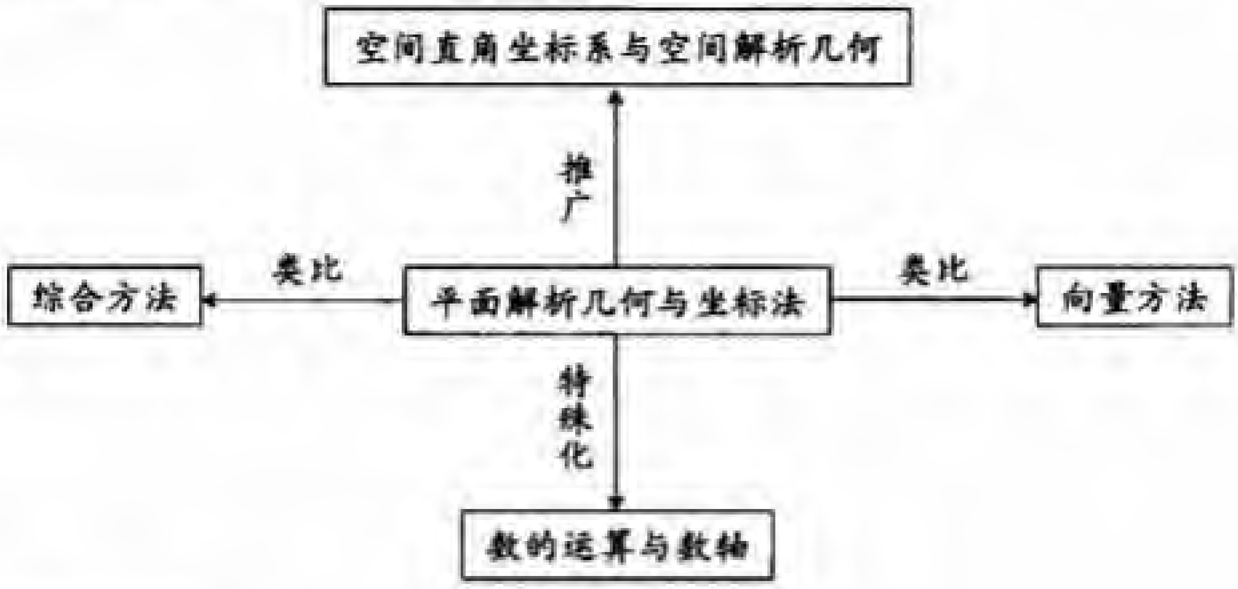
用坐标法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何元素：点、直线、圆；然后对坐标和方程进行代数运算；最后再把代数运算结果“翻译”成相应的几何结论．这就是用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何结论.

3. 坐标法还可以与平面几何中的综合方法、向量方法建立联系，同时可以推广到空间，解决立体几何问题. 这种联系可以用下列框图表示.



三、课时分配

全章教学时间约 9 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　圆的方程	约 2 课时
4.2　直线、圆的位置关系	约 4 课时
4.3　空间直角坐标系	约 2 课时
小　结	约 1 课时

II 教科书分析

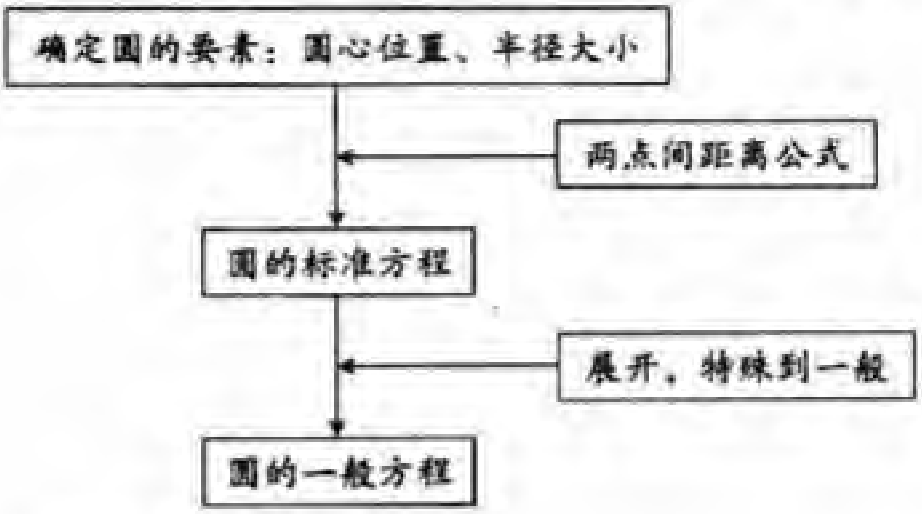
上一章，学生已经学习了直线与方程. 知道在直角坐标系中，直线可以用方程表示，通过方程，可以研究直线间的位置关系、直线与直线的交点坐标、点到直线的距离等问题，对数形结合的思想方法有了初步的体验.

本章将在上一章的基础上，在直角坐标系中建立圆的方程. 通过圆的方程，研究直线与圆、圆与圆的位置关系. 另外，还要学习空间直角坐标系的有关知识，建立空间直角坐标系中两点间距离公式，它是用坐标法研究空间几何对象的基础.

4.1 圆的方程

一、本节知识结构

本节分为两个小节，由两个部分组成：圆的标准方程、圆的一般方程。其结构如下图所示.



二、教学重点与难点

教学重点是掌握圆的标准方程与一般方程，难点是圆的方程的应用.

三、编写意图与教学建议

4.1.1 圆的标准方程

1. 在学生回顾确定直线的要素——两点（或者一点和斜率）确定一条直线的基础上，回顾确定圆的几何要素——圆心位置与半径大小，即圆是这样的一个点的集合

$$P=\{M\mid |MA|=r\}.$$

在平面直角坐标系中，圆心 A 可以用坐标 (a, b) 表示出来，半径长 r 是圆上任意一点与圆心的距离，根据两点间的距离公式，得到圆上任意一点 M 的坐标 (x, y) 满足的关系式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

经过化简，得到圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad ①$$

2. 教科书在得到方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 之后，用“曲线与方程”的思想，解释了坐标满足方程的点一定在曲线上. 即若点 $M(x, y)$ 在圆上，由上述讨论可知，点 M 的坐标适合方程①；反之，若点 $N(x_0, y_0)$ 的坐标适合方程①，也即适合关系 $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}=r$，这就说明点 N 与圆心 $A(a, b)$ 的距离为 r，点 N 在集合 $\{M\mid |MA|=r\}$ 中，因此点 N 在圆心为 A 的圆上.

3. 根据“曲线与方程”的意义可知，坐标满足方程的点在曲线上，坐标不满足方程的点不在曲线上. 为了使学生体验曲线和方程的思想，加深对圆的标准方程的理解，教科书配置了例 1.

例 1 要求首先根据圆心坐标与半径大小写出圆的标准方程，然后给出一个点的坐标，要求判断该点与圆的关系——在这个圆上，还是不在这个圆上．这一做法，体现了坐标法的思想．根据给出的圆心坐标以及半径长写出圆的标准方程——从几何到代数；根据坐标是否满足方程，来认识所对应的几何对象之间的关系——点在不在圆上——从代数到几何．

例 1 的教学可以与练习（第 127 页）中的第 2 题配合起来．例 1 中并不要求学生使用计算器计算，突出纸笔运算；而练习的第 2 小题给出圆的标准方程$(x-3)^2+(y+2)^2=16$，要求学生利用计算器把点坐标（如 $M_1(4.30,\ -5.72)$）代入方程的左边计算，通过与 16 的大小比较来判断与圆的位置关系，重心放在利用代数结果判断几何关系上，强调多想．

练习 2 的要求高于例 1，例 1 只要求判断“在”与“不在”，而练习 2 需要判断“在圆内”还是“在圆外”．当然，练习 2 是在“探究点 $M(x_0,\ y_0)$在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的条件是什么？在圆 $x^2+y^2=r^2$ 外呢？”之后．如果学生有困难，可以先就简单情形进行判断，如判断点 $M(2,\ 3)$ 在圆 $x^2+y^2=16$ 上、里面还是外面．

4．例 2 是圆的标准方程的应用．给出不在一直线上的三点，可以画出一个三角形，三角形有唯一的外接圆，因此可以求出它的标准方程．

由于圆的标准方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 含有三个参数 a，b，r，因此必须具备三个独立条件才能确定一个圆．

由于圆的标准方程形式是已知的，要求出三角形外接圆的方程只要确定圆的标准方程中的 a，b，r 就可以了，让学生初步体验用“待定系数法”求曲线方程这一数学方法使用的过程．这个方法的一般步骤已经在教科书第 129 页归纳给出．但是，在教学中，不要进行“一次性归纳”，过早地把这一结论抛给学生，而是让学生经过一定量的问题的研究、解决，有了一定的经验积累之后，在教师启发下，经过学生讨论由他们自己归纳出这样的几个步骤，是他们自己经验的总结．否则，学生就会机械地套用步骤，这对于学生思维能力的培养是不利的．这也是教科书为什么把这几个步骤安排在第 129 页而不是第 125 页的一个原因．

数与形结合的思想应该贯穿在整个平面解析几何的教学过程中．根据给出的三角形的三个顶点的坐标求出圆的标准方程之后，应该说，仅仅从代数的角度解决了问题．同时，还应该让学生画出这个三角形，并画出这个三角形的外接圆．这样做的目的是使得“数形结合”思想的教学落到实处，同时注意培养学生的画图技能，增强教学效果．

5．例 3 仍然是圆的标准方程的应用．例 3 的教学应该突出对问题的分析过程．在这个分析过程中，要强调图形在分析问题中的辅助作用．根据确定圆的要素——圆心位置和半径长，借助图形，结合题设条件，可以发现关键是找出圆心位置．圆心位置一旦确定，就可以再利用距离公式确定半径大小，从而求出圆的标准方程．

圆心是直线 l 与线段 AB 的垂直平分线 l'的交点，因此需要事先求出线段 AB 的垂直平分线 l'的方程．这里又需要求出线段 AB 的中点坐标与直线 AB 的斜率，从而求出 l'的斜率，写出 l'方程．

需要指出的是，求线段 AB 的垂直平分线的方程也可以不求线段 AB 的中点坐标与直线 l'的斜率，而是根据线段垂直平分线的性质“线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等”得到

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y+2)^2,$$

化简，得到直线 l'的方程　$x-3y-3=0$．

例 3 在“分析”结束后（或者在解题后小结反思时），可以让学生尝试画出一个框图，以明晰思路，渗透算法的思想．这对于培养学生的逻辑思维能力，提高分析问题解决问题的能力，养成良好的解题习惯是必要的．

6. 第 127 页练习中的第 3 与第 4 小题事先不必规定学生如何去解，待学生解答完成以后可以要求学生画出图形.

第 3 小题，已知直径的两个端点求圆的标准方程还可以根据“半圆上的圆周角是直角”给出其他解法，为第 130 页习题 4.1 中的第 5 题的解答埋下伏笔. 第 5 题更加一般化.

第 4 小题，由于题设条件给出的三个点中的一个是坐标原点，另两个点 $A(4,0)$、$B(0,3)$ 在坐标轴上，这三个点构成一个直角三角形的三个顶点，直角三角形的外接圆的圆心是斜边的中点，这样就很容易写出圆心坐标 $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$，而利用勾股定理，斜边长是 5，即直径长是 5，半径长是 $\frac{5}{2}$，圆的标准方程是 $(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. 这一做法，一方面加强数与形的结合，另一方面，借助图形的辅助可以发现有简洁解法，使得学生体会到数与形结合的重要性与优越性.

7. 教科书第 126 页提出“比较例 2 和例 3，你能归纳出求任意 $\triangle ABC$ 外接圆的标准方程的两种方法吗?”这两种方法就是：

(1) 根据题设条件，列出关于 a，b，r 的方程组，解方程组得到 a、b、r 的值，写出圆的标准方程.

(2) 根据确定圆的要素，以及题设条件，分别求出圆心坐标和半径大小，然后再写出圆的标准方程.

这两种方法应该尽可能在老师的启发引导下，由学生自己比较、归纳得到.

4.1.2 圆的一般方程

1. 教科书的开头设置了两个小问题.

思考：方程 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 表示什么图形？方程 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$ 表示什么图形？

要判断这两个方程分别表示什么图形，学生根据已有的知识，经过配方，把方程化成标准形式，然后再加以判断.

而这两个方程经过配方以后，分别是

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4, \ (x-1)^2+(y-2)^2=-1.$$

依据圆的标准方程，$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 表示以 $(1, -2)$ 为圆心，2 为半径长的圆．因为不存在点的坐标 (x, y) 满足方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=-1$，因而方程 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$ 不表示任何图形．

教科书这样编写，目的在于：

(1) 使得新知识建立在学生已有的知识之上，是旧知识的应用与延伸；

(2) 突破教学的难点：形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程在什么条件下表示圆？认识到方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 可能表示圆，但不一定．迫使学生进一步探究在什么条件下，一定表示圆；

(3) 采用从特殊到一般，由具体到抽象的认知方式．

2. 本节课的一个重点内容是研究方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件．

教学中可以采用让学生板演或者小组合作交流的方式．

将方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad ①$$

的左边配方，并把常数项移到右边，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \qquad ②$$

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，比较方程②和圆的标准方程，可以看出方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心、$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径长的圆；

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①只有一个解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①没有实数解，它不表示任何图形．

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①表示一个圆．方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做圆的一般方程．

注意圆的一般方程的完整表述，即圆的一般方程是

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，而不是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$．

在今后的学习中，学生容易忽视前提条件 $D^2+E^2-4F>0$．

3. 教科书要求学生思考：圆的标准方程与圆的一般方程各有什么特点？

圆的标准方程指出了圆心坐标与半径大小，几何特征明显；圆的一般方程表明圆的方程是一种特殊的二元二次方程，代数特征明显．

4. 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 只有一个解 $x=-\frac{D}{2}$、$y=-\frac{E}{2}$，它表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$．有时，我们把这样的圆称为“点圆”，作为圆的特殊情形．需要注意的是，教科书中并没有这样的表述．

5. 同圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

一样，圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

中也含有三个待定的系数 D，E，F，因此必须具备三个独立条件，才能确定一个圆．

教科书第 128 页的例 4 是为圆的一般方程的应用而设置的．主要是让学生根据题设条件，运用待定系数法确定圆的一般方程中的系数 D，E，F，从而求出圆的一般方程．

教科书中并没有给出图形，教学中，可以要求学生画出图形，加强数与形的联系．

在得到圆的一般方程 $x^2+y^2-8x+6y=0$ 之后，要回答这个圆的半径长与圆心位置也可以通过配方，化成标准方程来回答.

6. "待定系数法"是数学中常用的一种方法，这在以前已学习过，例如求直线的方程、由已知条件确定二次函数等等.

教科书在边空提出"与例 2 的方法比较，你有什么体会?"要求把例 4 与前一小节的例 2 进行解题方法上的比较，谈体会. 目的在于总结经验，归纳出使用待定系数法的一般步骤. 教学中不要由教师直接给出，应该让学生进行合作、交流，讨论得到.

用待定系数法求圆的方程的步骤大致是：

① 根据题意选择方程的形式——标准方程或一般方程；

② 根据条件列出关于 a，b，r 或 D，E，F 的方程组；

③ 解出 a，b，r 或 D，E，F，代入标准方程或一般方程.

教科书仅就求圆的方程说明待定系数法的一般步骤，并不要求说明求一般曲线方程的待定系数法的一般步骤.

7. 例 5 是已知曲线求它的方程. 习题 4.1 中还配备了一些简单的求轨迹方程的问题，以逐步提高学生求曲线方程的能力.

求曲线方程的方法也是多种多样的，教科书第 129 页的例 5 体现了由曲线求方程的一种思想方法.

条件许可，教学时，可以利用信息技术工具（如《几何画板》软件）动态演示. 如图 4-1，当点 A 在圆上运动时，追踪点 M，M 画出一个圆. 学生清楚地看出，点 A 的运动引起点 M 的运动，而点 A 在已知圆上运动，点 A 的坐标满足方程$(x+1)^2+y^2=4$. 建立点 M 与点 A 坐标之间的关系，就可以建立点 M 的坐标（x，y）之间的关系，求出点 M 的轨迹方程，这正是"分析"中所指出的.

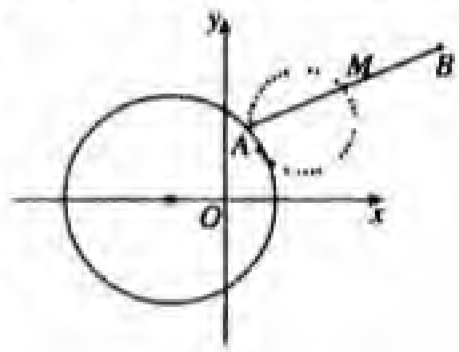


图 4-1

在这一过程中，学生可以在动态的观察中找出引起动点变动的原因，抓住问题的本质.

这一问题的解题步骤大致有二：

(1) 求出点 $M(x, y)$ 与点 $A(x_0, y_0)$ 之间的坐标关系

$$x=\frac{x_0+4}{2},\ y=\frac{y_0+3}{2},$$

$$x_0=2x-4,\ y_0=2y-3.$$

(2) 利用点 A 的坐标（x_0，y_0）满足方程 $(x+1)^2+y^2=4$，即 $(x_0+1)^2+y_0^2=4$，消去点 A 的坐标，得到点 M 的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的关系式——点 M 的轨迹方程.

与求圆的标准方程不同的是，求出圆的标准方程是直接根据圆的意义，即"平面上与一个定点距离等于定长的点的轨迹是圆."，知道了动点运动时满足的几何条件.

与这道例题相配合的是习题 4.1 中的第 6 题. 如果这道题有一定的难度，可以事先让学生根据三角形三顶点的坐标求出其重心（三边上中线的交点）的坐标. 还可以借助信息技术演示，探究三角形重心的轨迹.

8. 第 130 页习题 4.1 中 B 组第 2 题与第 3 题，都可以先用信息技术手段探求动点的轨迹，在动点动态变动的过程中探索动点运动时所满足的几何条件或者寻找引起动点变动的原因，抓住问题的本质，找出解法.

(1) 习题 4.1 的 B 组第 2 题：

一条线段 $AB(|AB|=2a)$的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程.

如图 4-2，借助《几何画板》软件的动态演示，可见点 M 在运动时，保持到原点的距离为定长，即Rt$\triangle AOB$ 的斜边上的中线长．因为 $|AB|=2a$，即点 $M\in\{M||OM|=a\}$，所以点 M 的轨迹是以 O 为圆心、a 为半径长的圆．根据圆的标准方程，点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2$．

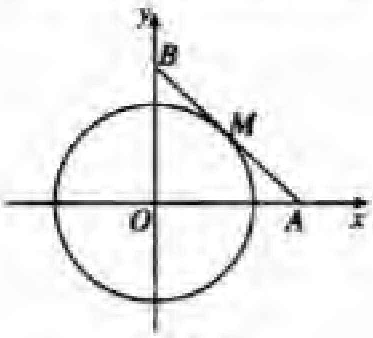


图 4-2

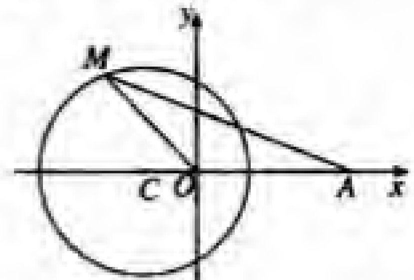


图 4-3

（2）第 131 页习题 4.1 的 B 组第 3 题：

已知点 M 与两个定点 $O(0，0)$，$A(3，0)$ 的距离的比为$\frac{1}{2}$，先利用技术手段，探求点 M 的轨迹，然后求出它的方程．

如图 4-3，借助《几何画板》软件，探究点 M 的轨迹，可见是圆．

设 $M(x，y)$．根据题设条件有

$$M\in\{M||MA|=2|MO|\}.$$

因为有 $O(0，0)$，$A(3，0)$，所以有

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}.$$

化简，得　$x^2+y^2+2x-3=0$．

由以上过程知，满足条件$\{M||MA|=2|MO|\}$的点 M 的坐标满足方程 $x^2+y^2+2x-3=0$；反过来，坐标满足方程 $x^2+y^2+2x-3=0$ 的点也满足$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，即满足条件$\{M||MA|=2|MO|\}$．因此所求点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2+2x-3=0$．经配方，得$(x+1)^2+y^2=4$．

点 M 的轨迹是以点 $D(-1，0)$ 为圆心，半径长为 2 的圆．

（3）注意，第 3 题与第 2 题要求上的区别．一个是“探求点 M 的轨迹方程”，一个是“探求点 M 的轨迹，然后求出它的方程．”

“轨迹”是图形，要指出形状、位置、大小（范围）等特征；“轨迹方程”是方程（等式），不仅要给出方程，还要指出变量的取值范围．

这里又一次充分体现“数形结合”的思想．

（4）可以根据学生的实际情况，把这两道题都设置成“开放题”．如

① 一条线段 $AB(|AB|=2a)$的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，求线段 AB 的三等分点 $M(|AM|=2|MB|)$的轨迹方程．

② 已知点 M 与两个定点 $O(0，0)$，$A(3，0)$ 的距离的比为 $\lambda(\lambda>0)$，先利用技术手段，探求点 M 的轨迹，若轨迹是圆，求出它的方程，并画出图形．

当 $\lambda=1$ 时，点 M 的轨迹是线段 OA 的垂直平分线；当 $\lambda>0$，且 $\lambda\neq1$ 时，点 M 的轨迹还是圆．

四、补充例题

1. 已知圆 C 的方程是$(x-2.11)^2+(y+1.05)^2=10$．借助计算器，判断下列各点，哪些在圆上？在圆内？在圆外？

$A(0.25，-3.73)$，$B(5.10，-0.64)$，$D(3.11，1.95)$，$E(2.01，2.12)$．

解：A 在圆 C 外，B 在圆 C 内，D 在圆 C 上，E 在圆 C 外.

说明：检查对基础知识和基本技能的理解与掌握，体验坐标满足方程的点在曲线上，坐标不满足方程的点不在曲线上. 因为只要比较该点到圆心的距离与圆的半径的大小关系，就可以判断该点与圆的位置关系，所以要求判断给出的点在圆内还是在圆外？在代数上的表现是把点的坐标代入圆的标准方程的左边所得到的值与右边比较大小.

2. 圆 $(x-3)^2+(y+4)^2=1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称的圆的方程是（B）.

（A）$(x+3)^2+(y-4)^2=1$　　（B）$(x-4)^2+(y+3)^2=1$

（C）$(x+4)^2+(y-3)^2=1$　　（D）$(x-3)^2+(y-4)^2=1$

解：与圆心 $(3,\ -4)$ 关于直线 $x+y=0$ 对称的点是 $(4,\ -3)$，于是，与已知圆关于直线 $x+y=0$ 对称的圆的方程是 $(x-4)^2+(y+3)^2=1$. 选择（B）.

说明：确定圆的要素是圆心位置与半径大小. 与一条直线对称的两个圆大小不变，圆心关于直线对称，只要确定圆心位置即可. 而与 $(3,\ -4)$ 关于直线 $x+y=0$ 对称的点是 $(4,\ -3)$.

3. $\triangle ABC$ 的三顶点分别是 $A(-2,\ 2)$，$B(1,\ 4)$，$C(5,\ -2)$，求它的外接圆的方程.

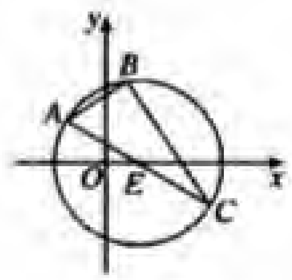
解：设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则

$$\begin{cases}2D-2E-F=8,\\ D+4E+F=-17,\\ 5D-2E+F=29.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}D=-3,\\ E=0,\\ F=-14.\end{cases}$

所以，所求圆的方程为 $x^2+y^2-3x-14=0$.

如果画出图形，可以猜想 $\triangle ABC$ 是直角三角形.



（第 3 题）

直线 AB，BC 的斜率分别是 $k_{AB}=\dfrac{2}{3}$，$k_{BC}=-\dfrac{3}{2}$，

因为 $k_{AB}\,k_{BC}=\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1$，

所以 $AB\perp BC$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心是 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，半径长

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(5+2)^2+(-2-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{65}.$$

所以，所求圆方程为 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{65}{4}$.

说明：这是教科书内容的巩固. 解题过程中要解三元一次方程组，考查运算能力. 但是，画出图形可以发现，这个三角形是直角三角形. 说明了图形在解决问题中的辅助作用，数与形结合的重要性.

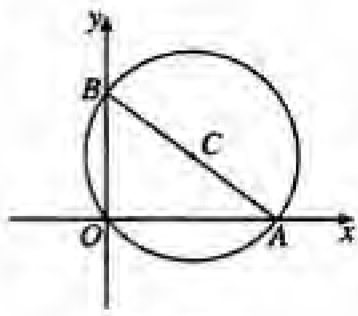
五、习题解答

练习（第 127 页）

1. (1) $(x+3)^2+(y-4)^2=5$；(2) $(x-8)^2+(y+3)^2=25$.
2. (1) 点 M_1 在圆内；(2) 点 M_2 在圆外；(3) 所以点 M_3 在圆上.
3. $(x-5)^2+(y-6)^2=10$.

点 M 在圆上，点 N 在圆外，点 Q 在圆内.

4. 解：如图，$\triangle AOB$ 是直角三角形，它的外接圆的圆心是斜边的中点 C，半径长 $r=\frac{1}{2}|AB|$．根据题设，得



（第 4 题）

圆心 C 的坐标是 $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$．

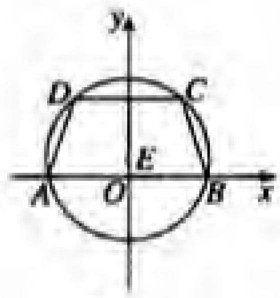
半径长 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=\frac{5}{2}$．

所以，$\triangle AOB$ 外接圆的标准方程是

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

练习（第 130 页）

1. (1) 圆心坐标是 (3, 0)，半径长是 3；
   (2) 圆心坐标是 $(0,\ -b)$，半径长是 $|b|$；
   (3) 圆心坐标是 $(a,\ \sqrt{3}a)$，半径长是 $|a|$．
2. (1) 方程 $x^2+y^2=0$ 表示一个点 (0, 0)；
   (2) 方程 $x^2+y^2-2x+4y-6=0$ 表示圆心坐标是 (1, −2)，半径长是 1 的圆；
   (3) 方程 $x^2+y^2+2ax-b^2=0$ 表示圆心坐标是 $(-a,\ 0)$，半径长是 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆．
3. 解：显然，等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆的圆心在 y 轴上．



（第 3 题）

由题设，可得点 B 的坐标是 (3, 0)，点 C 的坐标是(2, 3)．

线段 BC 的中点坐标是 $F\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，直线 BC 的斜率是 $k_{BC}=-3$．

线段 BC 的垂直平分线的方程是 $y-\frac{5}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$．

与 y 轴的方程 $x=0$ 联立，解得 $y=2$．

所以，梯形外接圆的圆心 E 的坐标是 (0, 2)．

半径长 $|EB|=\sqrt{(0-3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{13}$．

所以，梯形外接圆的方程是 $x^2+(y-2)^2=13$．

半径长是 $\sqrt{13}$，圆心坐标是 (0, 2)．

习题 4.1　A 组

1. (1) 圆 $x^2+y^2-2x-5=0$ 的圆心坐标是 (1, 0)，半径长 $r=\sqrt{6}$，图略；
   (2) 圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的圆心坐标是 (−1, 2)，半径长 $r=3$，图略；
   (3) 圆 $x^2+y^2+2ax=0$ 的圆心坐标是 $(-a,\ 0)$，半径长 $r=|a|$，图略；
   (4) 圆 $x^2+y^2-2by-2b^2=0$ 的圆心坐标是 $(0,\ b)$，半径长 $r=\sqrt{3}|b|$，图略．
2. 解：(1) 半径长 $r=\sqrt{(8-5)^2+(-3-1)^2}=5$，圆的方程是 $(x-8)^2+(y+3)^2=25$．
   图略．
   (2) 设经过 A，B，C 三点的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad ①$$

把 A，B，C 的坐标分别代入①，得

$$\begin{cases}(a+1)^2+(b-5)^2=r^2,\\(a-5)^2+(b-5)^2=r^2,\\(a-6)^2+(b+2)^2=r^2.\end{cases}$$

解此方程组，得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ r^2=25.\end{cases}$

所以，经过 A，B，C 三点的圆的方程是

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25.$$

图略.

3. 解：设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由题设，得

$$\begin{cases}a^2+b^2=r^2,\\ (a-2)^2+(b-1)^2=r^2,\\ a-2b-1=0.\end{cases}$$

解此方程组，得$\begin{cases}a=\dfrac{6}{5},\\ b=\dfrac{1}{10},\\ r^2=\dfrac{29}{20}.\end{cases}$

所以，所求圆的标准方程是

$$\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{1}{10}\right)^2=\frac{29}{20}.$$

说明 本题也可以先求出线段 OA 的垂直平分线的方程

$$y=-2x+\frac{5}{2},$$

然后与方程 $x-2y-1=0$ 联立，求出圆心 C 的坐标$\left(\frac{6}{5},\frac{1}{10}\right)$.

再求出半径长 $r=\sqrt{\frac{29}{20}}$，从而求出圆的标准方程.

4. 解：由题设，线段 AB 的中点坐标是 $E(0,2)$，直线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{3-1}{1-(-1)}=1.$$

所以，线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y=-(x-2)$，即

$$y=-x+2.$$

与 x 轴的方程 $y=0$ 联立，解得

$$\begin{cases}x=2,\\ y=0.\end{cases}$$

即圆心 C 坐标是 $(2,0)$，半径长 $r=\sqrt{(2+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$.

所以，所求圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=10$.

5. 证法一：因为直径的端点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以圆心坐标和半径长分别为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right),\ \frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

所以，圆的方程为

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}.$$

化简得

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0,$$

即

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

证法二：设 $M(x, y)$ 是圆上不同于 A、B 的任意一点．由 $MA\perp MB$ 知

$$k_{MA}k_{MB}=-1.$$

即 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=-1(x\neq x_1, x\neq x_2)$. ①

反过来，坐标满足①式的点，一定满足 $k_{MA}k_{MB}=-1$，即该点在以 AB 为直径的圆上．

由①式，得 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

又因为点 A，B 的坐标也满足上式，所以，所求圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

6. 解：设 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标为 (x_0, y_0)，重心 G 的坐标为 (x, y).

因为 $x=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{x_0-3+2}{3}$,

$y=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{y_0-1+1}{3}$,

所以，

$$x_0=3x+1,\ y_0=3y. \quad ①$$

又点 A 在圆 $(x+2)^2+(y-4)^2=4$ 上运动，所以

$$(x_0+2)^2+(y_0-4)^2=4. \quad ②$$

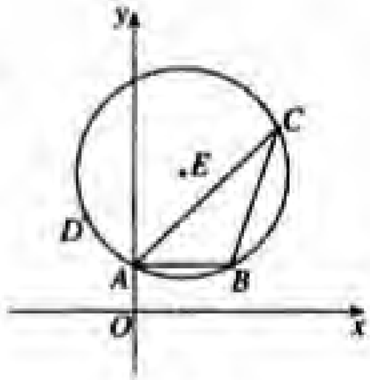
把①式代入②式，得 $(3x+3)^2+(3y-4)^2=4$. 整理得

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

所以，$\triangle ABC$ 的重心 G 的轨迹方程是 $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

7. 解：设经过 A，B，C 三点的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \quad ①$$



（第 7 题）

把 A，B，C 的坐标分别代入①，得

$$\begin{cases}a^2+(b-1)^2=r^2,\\(a+2)^2+(b-1)^2=r^2,\\(a-3)^2+(b-4)^2=r^2.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\\r^2=5.\end{cases}$

所以，经过 A，B，C 三点的圆的标准方程是

$$(x-1)^2+(y-3)^2=5.$$

把点 D 的坐标 $(-1, 2)$ 代入上面方程的左边，得

$$(-1-1)^2+(2-3)^2=5.$$

所以，点 D 在经过 A，B，C 三点的圆上，即

A，B，C，D 四点在同一个圆上．

B 组

1. 解：如图，根据题意，等腰三角形 ABC 的另一个端点 C 在以 $A(4, 2)$ 为圆心，经过点 $B(3, 5)$

的圆上，且除去点 B 以及点 B 关于点 A 对称的点 B'.

设与点 $B(3, 5)$ 关于 $A(4, 2)$ 对称的点是 $B'(x', y')$，则有

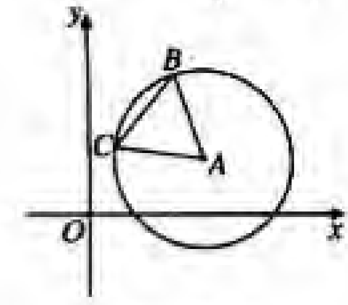
$$\frac{x'+3}{2}=4,\ \frac{y'+5}{2}=2.$$

解得 $x'=5$，$y'=-1$.

所以点 B 关于点 A 对称的点是 $B'(5, -1)$.

又 $|AB|=\sqrt{(4-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{10}$.

顶点 C 的轨迹是圆 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$，

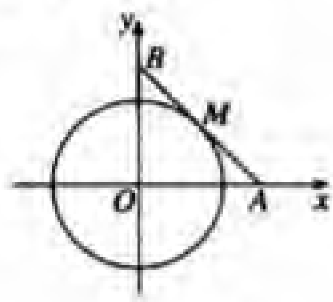


（第 1 题）

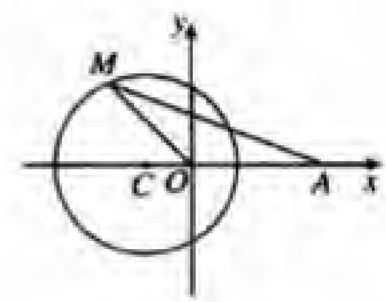
除去两点 $B(3, 5)$，$B'(5, -1)$. 即顶点 C 的轨迹方程是

$$(x-4)^2+(y-2)^2=10,\ 且\begin{cases}x\neq 3,\\ y\neq 5;\end{cases}\ \begin{cases}x\neq 5,\\ y\neq -1.\end{cases}$$

2. 解：如图，点 M 运动时，到原点的距离为定长，即 Rt$\triangle AOB$ 的斜边上的中线长. 因为 $|AB|=2a$，即点 $M\in\{M\,|\,|OM|=a\}$，所以点 M 的轨迹是以 O 为圆心，a 为半径长的圆. 根据圆的标准方程，点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 解：设 $M(x, y)$. 根据题设条件有

$$M\in\{M\,|\,|MA|=2|MO|\}.$$

因为有 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$，所以有

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}.$$

化简，得 $x^2+y^2+2x-3=0$.

由以上过程知，满足条件 $\{M\,|\,|MA|=2|MO|\}$ 的点 M 的坐标满足方程 $x^2+y^2+2x-3=0$；反过来，坐标满足方程 $x^2+y^2+2x-3=0$ 的点也满足 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，即满足条件 $\{M\,|\,|MA|=2|MO|\}$.

所以，所求点 M 的轨迹方程是 $x^2+y^2+2x-3=0$.

经配方，得 $(x+1)^2+y^2=4$.

点 M 的轨迹是以点 $D(-1, 0)$ 为圆心，半径长为 2 的圆.

(1) 如图，可以借助《几何画板》软件，探究点 M 的轨迹是圆.

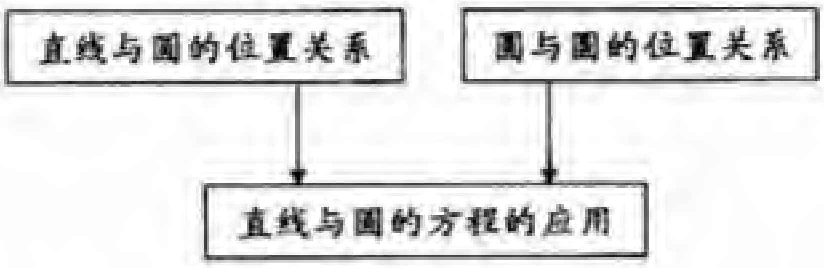
(2) 第 3 题与第 2 题要求上的区别. 一个是"探求点 M 的轨迹方程"，一个是"探求点 M 的轨迹"，然后求出方程，画出图形.

"轨迹"是图形，要指出形状、位置、大小（范围）等特征；"轨迹方程"是方程（等式），不仅要给出方程，还要指出变量的取值范围.

4.2 直线、圆的位置关系

一、本节知识结构

本节由三部分组成，直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系、直线与圆的方程的应用．它们的关系如下列框图所示．



二、教学重点与难点

教学重点：

（1）能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系；

（2）能用直线和圆的方程解决一些简单的问题．

教学难点：直线与圆的方程的应用．

三、编写意图与教学建议

教科书一开始，提出了一个直线与圆的位置关系的应用题：

一艘轮船在沿直线返回港口的途中，接到气象台的台风预报：台风中心位于轮船正西 70 km 处，受影响的范围是半径长为 30 km 的圆形区域．已知港口位于台风中心正北 40 km 处，如果这艘轮船不改变航线，那么它是否会受到台风的影响？

这是为了说明研究直线与圆的位置关系有一定的实际意义，说明研究直线与圆的位置关系的必要性．

当然这个问题即便不建立直角坐标系也是可以解决的，所以教科书提出“如果不建立直角坐标系，你能解决这个问题吗？”

如图 4-4，设轮船开始位于 x 轴上的 A 点，港口位于 y 轴上的 B 点．利用平面几何知识，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，原点 O 到直线 AB 的距离即为斜边上的高．

因为 $|OA|=70$ km，$|OB|=40$ km，根据勾股定理，有

$$|AB|=\sqrt{70^2+40^2}=10\sqrt{65}.$$

设 O 到 AB 的距离为 d，则有

$$d\cdot|AB|=|OA|\cdot|OB|.$$

所以有 $d=\dfrac{|OA|\cdot|OB|}{|AB|}=\dfrac{70\times40}{10\sqrt{65}}\approx34.7$ km．

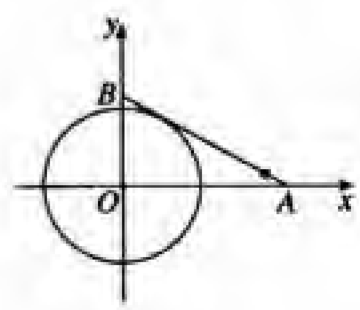


图 4-4

因为 34.7 km>30 km，所以，这艘轮船不必改变航线，不会受到台风的

影响.

4.2.1 直线与圆的位置关系

1. 学生已经从初中几何中得知，直线与圆有三种位置关系：

(1) 直线与圆相交：有两个公共点；

(2) 直线与圆相切：只有一个公共点；

(3) 直线与圆相离：没有公共点.

其划分的标准是直线与圆的公共点的个数.

2. 教科书提出思考题：在初中，我们怎样判断直线与圆的位置关系？如何用直线和圆的方程判断它们之间的位置关系？

这里提出两个问题，一个是从几何的角度说明判断方法，另一个是通过直线与圆的方程如何研究它们之间的位置关系.

根据学生已有的经验，判断直线 l 与圆 C 的位置关系，一种方法，可以依据圆心到直线的距离与半径的关系；另一种方法，就是看由它们的方程组成的方程组有无实数解. 这就是教科书第 134 例 1 给出两种解法的原因.

教科书给出的第一种解法是根据"由它们的方程组成的方程组有无实数解"，主要是突出坐标法的思想——通过方程组解的研究来研究曲线间的位置关系. 当然，学生首先采用哪一种方法都无关紧要.

即便是依据圆心到直线的距离与半径长的关系来判断直线与圆的位置关系，也是运用点到直线的距离公式求出圆心到直线的距离，然后比较这个距离与圆的半径的大小作出位置关系的判断，仍然是用坐标法解决问题.

3. 例 1 不仅要求判断直线与圆的位置关系，还要求出交点坐标，目的在于让学生进一步认识方程组解的意义.

本小节在习题中还涉及了曲线的交点问题，但只是局限于直线与圆的交点或圆与圆的交点，教学时不必扩大范围.

曲线的交点也就是两条曲线的公共点，求曲线的交点就是求两条曲线的公共点的坐标. 由曲线上点的坐标和它的方程的解之间的对应关系可知，两条曲线交点的坐标，应该是这两条曲线的方程所组成的方程组的实数解. 方程组有几组实数解，这两条曲线就有几个交点；方程组无实数解，那么这两条曲线就没有交点. 也就是说，两条曲线有交点的条件是这两条曲线的方程所组成的方程组有实数解.

4. 教科书第 134 页的例 2 是给出过定点的直线与定圆相交，并且已经知道被截得的弦长，要求直线的方程.

要注意分析过程. 由于直线过定点，要求直线的方程只要再确定直线的斜率就可以了，可以选择直线的点斜式方程，然后根据条件确定直线的斜率 k. 条件的使用方式是解题的关键，不同的使用方式可能产生不同的解法.

教科书给出的解法突出了"适当地利用图形的几何性质，有助于简化计算". 强调图形在解题中的辅助作用，加强了形与数的结合. 实际上，直线被圆所截得的弦长是直线与圆的两个交点之间的距离，因此可以利用"弦长公式"把弦的长度用 k 表示出来. 由于弦长已经给出，从而可以得到关于斜率 k 的方程，解出 k，再确定直线的方程，因此这里还有解法二.

解法二：设直线 l 与已知圆的交点为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，直线 l 的斜率为 k.

因为直线 l 过点 $M(-3, -3)$，所以，所求直线 l 的方程为

$$y+3=k(x+3),$$

即

$$y=kx+3k-3.$$

代入圆的方程 $x^2+y^2+4y-21=0$，并整理得

$$(1+k^2)x^2+2k(3k-1)x+(3k-1)^2-25=0.$$

根据一元二次方程根与系数的关系，有

$$x_1+x_2=\frac{2k(3k-1)}{k^2+1},\ x_1x_2=\frac{(3k-1)^2-25}{k^2+1}. \quad ①$$

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2}\\&=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}\\&=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}.\end{aligned}$$

因为 $|AB|=4\sqrt{5}$，所以有

$$(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=80. \quad ②$$

把①式代入②式，得

$$(1+k^2)\left[\left(\frac{2k(3k-1)}{k^2+1}\right)^2-4\times\frac{(3k-1)^2-25}{k^2+1}\right]=80.$$

经过整理，得

$$2k^2-3k-2=0,$$

解得

$$k=-\frac{1}{2},\ 或\ k=2.$$

所以，所求的直线 l 有两条，它们的方程分别为

$$y+3=-\frac{1}{2}(x+3),\ 或\ y+3=2(x+3),$$

即

$$x+2y+9=0,\ 或\ 2x-y+3=0.$$

这里的解法二与教科书给出的解法相比，①式代入②式的运算显然要烦琐一些．但是，教学是一个过程，不是仅仅为了追求一个结果．所以，不妨让学生再用解法二的方法做一做，因为解法二更具一般性，为解决直线被圆锥曲线截得的线段长作准备．

5. 教科书在本小节的最后部分总结了判断直线 l 与圆 C 位置关系的两种方法：

一种是，判断直线 l 与圆 C 的方程组成的方程组是否有解．如果有解，直线 l 与圆 C 有公共点．有两组实数解时，直线 l 与圆相交；有一组实数解时，直线 l 与圆相切；无实数解时，直线 l 与圆 C 相离．

另一种方法是，判断圆 C 的圆心到直线 l 的距离 d 与圆的半径长 r 的关系．如果 $d<r$，直线与圆相交；如果 $d=r$，直线 l 与圆相切；如果 $d>r$，直线 l 与圆 C 相离．

这个小结突出了直线 l 与圆 C 交点的坐标是它们的方程组成的方程组的实数解．

教学时，教师可以引导学生讨论，归纳，总结．

4.2.2 圆与圆的位置关系

1. 同判断直线与圆的位置关系一样，判断圆与圆的位置关系有两种方法．一种是利用初中学习过的结论，另一种是根据它们的方程组成的方程解的情况．

设圆 C_1 的半径为 r_1，圆 C_2 的半径是 r_2，则

(1) 当连心线的长 $>r_1+r_2$ 时，圆 C_1 和圆 C_2 相离；

(2) 当连心线的长$=r_1+r_2$时，圆 C_1 和圆 C_2 相外切；

(3) 当$|r_1-r_2|<$连心线的长$<r_1+r_2$时，圆 C_1 和圆 C_2 相交；

(4) 当连心线的长$=|r_1-r_2|$时，圆 C_1 和圆 C_2 内切；

(5) 当连心线的长$<|r_1-r_2|$时，圆 C_1 和圆 C_2 内含.

2. 教科书第 136 页的例 3 给出了两种解法.

第一种解法，是讨论由两个圆的方程组成的方程组解的情况，然后判断两圆相应的位置关系，突出坐标法的特点.

(1) 解法一中，把圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得到方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ①\\ x^2+y^2-4x-4y-2=0. & ②\end{cases}$$

①-②，得

$$x+2y-1=0. \quad ③$$

教科书要求"画出圆 C_1 与 C_2 以及方程③表示的直线，你发现了什么？你能说明为什么吗?"

如图 4-5，方程③所表示的直线是两圆公共弦所在的直线.

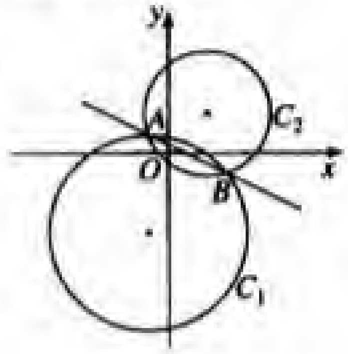


图 4-5

因为由方程①、②组成的方程组的解 (x, y) 必满足方程③，如果方程组有两组实数解，即两圆有两个公共点，这两个公共点必在方程③确定的直线上，两点确定一条直线，方程③表示的直线就是两圆的公共弦所在的直线.

这样一来，圆 C_1 与 C_2 公共点的问题就化归为

直线 $x+2y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x+8y-8=0$(或者 $x^2+y^2-4x-4y-2=0$)公共点的问题.

于是，就可以先求圆心 $(-1, -4)$（或者 $(2, 2)$）到直线 $x+2y-1=0$ 的距离 d，再把 d 与圆 $x^2+y^2+2x+8y-8=0$（或者 $x^2+y^2-4x-4y-2=0$）的半径长 r_1（或者 r_2）进行大小比较，来判断位置关系.

(2) 例 3 只要判断圆 C_1 与圆 C_2 是否有公共点，并不要求出公共点的坐标，因此不必求出方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ①\\ x^2+y^2-4x-4y-2=0 & ②\end{cases}$$

的两组解.

事实上，解方程组可得$\begin{cases}x=3,\\ y=-1;\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$

因此圆 C_1 与圆 C_2 有两个公共点，它们的坐标分别为$(3, -1)$和$(-1, 1)$.

3. 例 3 的解法二中，要判断圆 C_1 与 C_2 相交，不仅需要判断连心线的长与 r_1+r_2 的关系，还要判断连心线的长与$|r_1-r_2|$的关系. 因为只有当$|r_1-r_2|<$连心线的长$<r_1+r_2$时，圆 C_1 与 C_2 相交.

4.2.3 直线与圆的方程的应用

本小节设置了两道例题，分别说明直线与圆的方程在实际生活中的应用，以及用坐标法研究几何问题的基本思想及其解题过程.

1. 例 4 的解答，首先是建立直角坐标系，把一个实际问题转化为数学问题——求出圆拱桥所在的圆的方程；然后解决这个数学问题——利用圆的方程求出点 A_2，P_2 的坐标，从而求出线段 A_2P_2 的长；最后再解释它的实际意义——圆拱桥上支柱 A_2P_2 的高. 这也正是用坐标法解决问题的基本过程.

教科书提出"如果不建立坐标系，你能解决这个问题吗?"这是为了说明坐标法解决一些问题的优越性.

如图 4-6，过 P_2 作 $P_2H \perp OP$. 由已知，$|OP|=4$，$|OA|=10$. 在 Rt△AOC中，有$|CA|^2=|CO|^2+|OA|^2$. 设圆拱所在圆 C 的半径长是 r，则有

$$r^2=(r-4)^2+10^2.$$

解得 $r=14.5$.

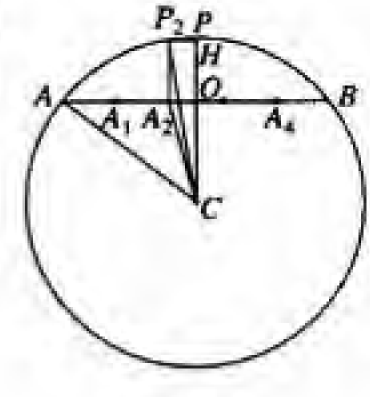


图 4-6

在 Rt△CP_2H 中，有$|CP_2|^2=|CH|^2+|P_2H|^2$. 因为$|P_2H|=|OA_2|=2$，于是有

$$|CH|^2=r^2-|OA_2|^2=14.5^2-4=206.25.$$

又$|OC|=14.5-4=10.5$，于是有

$$|OH|=|CH|-|CO|=\sqrt{206.25}-10.5$$
$$\approx 14.36-10.5=3.86.$$

所以支柱 A_2P_2 的长度约为 3.86 m.

相比之下，坐标法比较简单.

2. 第 140 页的例 5 是典型的用坐标法证明平面几何问题的题.

已知内接于圆的四边形的对角线互相垂直，求证：圆心到一边的距离等于该边对边长的一半.

在“分析”中，指出建立直角坐标系时应该注意选择图形中互相垂直的两条直线作为 x 轴与 y 轴，并尽可能使得所涉及的点位于坐标轴上，因为这样可以使得它们的坐标比较简单（有一个是零）.

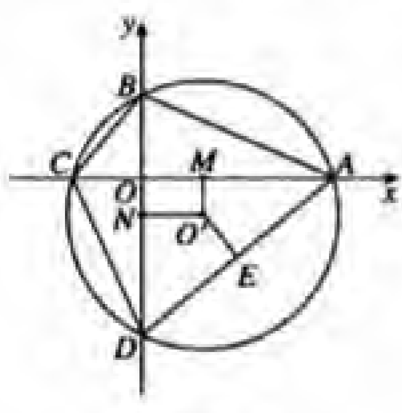


图 4-7

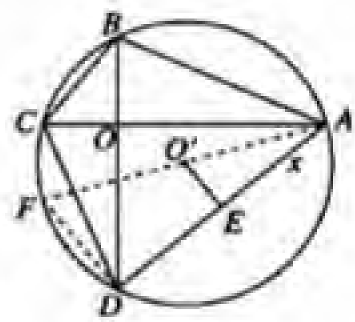


图 4-8

如图 4-7，把找出 O'的坐标的任务分解为找出它的横坐标与纵坐标两件事，因此应该由点 O'向 x 轴画垂线，找出垂足 M 的横坐标，也就是点 O'的横坐标. 类似地，点 O'的纵坐标就是点 N 的纵坐标.

例 5 还可以采用综合法进行证明，如图 4-8，这一方法的难点在于作出辅助线 AF. 这样就可以找出 $2|O'E|$，即$|FD|$，然后证明$|FD|=|CB|$.

坐标法：建立适当地坐标系以后，把要证明的结论——线段长度关系，变成坐标之间的运算（证明→计算）. 也就是：

首先建立适当地坐标系，将几何问题代数化，用代数的语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题；分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题.

3. 在本节的最后，总结出坐标法解题的一般步骤. 这是“标准”所要求达到的. 教学中，可以放在第 141 页练习第 4 题之后，这样学生可以有更深的感受. 教师要注意引导学生讨论、交流、归纳.

用坐标方法解决几何问题时，先用坐标和方程表示相应的几何元素：点、直线、圆，然后通过对坐标和方程的代数运算，把代数运算结果“翻译”成几何关系，得到几何问题的结论. 这就是用坐标方法解决平面几何问题的“三步曲”：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果"翻译"成几何结论.

4. 坐标法最精彩的应用是平面几何定理的机器证明. 而实现机器证明几何定理的工作，中科院院士吴文俊教授有杰出的贡献. 因此，教科书安排了"阅读与思考　坐标法与机器证明".

"坐标法与机器证明"简要地介绍了坐标法思想形成的历史过程、发展，以及一些数学家笛卡尔、来布尼兹、塔斯基、王浩等所作出的重要贡献，特别介绍吴文俊教授在这方面所作出的贡献.

四、补充例题

1. 圆 $x^2+y^2-2x-5=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的交点为 A，B，则线段 AB 的垂直平分线的方程是（　　）

(A) $x+y-1=0$　　　　(B) $2x-y+1=0$

(C) $x-2y+1=0$　　　　(D) $x-y+1=0$

解：线段 AB 的垂直平分线是过两圆圆心的直线. 对已知圆的方程 $x^2+y^2-2x-5=0$，$x^2+y^2+2x-4y-4=0$，经配方，得

$$(x-1)^2+y^2=6，(x+1)^2+(y-2)^2=9.$$

圆心分别为 $C_1(1,0)$，$C_2(-1,2)$，直线 C_1C_2 的方程为 $x+y-1=0$. 选择（A）.

说明：与直线的两点式方程结合的题. 垂直平分两圆公共弦的直线就是连结两圆圆心的直线. 事实上，画出图形，排除其他选项，立即知道选择（A）.

2. 求通过直线 l：$2x+y+4=0$ 及圆 C：$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点，并且有最小面积的圆 C' 的方程.

解法一：圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. 设直线 l 与圆 C 相交于 A，B 两点，D 为线段 AB 的中点，则直线 CD 的方程为 $x-2y+5=0$，

解方程组 $\begin{cases}x-2y+5=0,\\2x+y+4=0\end{cases}$ 得 $x=-\frac{13}{5}$，$y=\frac{6}{5}$.

所以，点 D 的坐标是 $\left(-\frac{13}{5},\frac{6}{5}\right)$.

$$|CD|=\frac{|2\times(-1)+2+4|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}，|AD|=\sqrt{4-\frac{16}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

因此，以 D 为圆心，AB 为直径的圆是面积最小的圆. 其方程为

$$\left(x+\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{4}{5}.$$

解法二：设所求圆的方程是 $(x^2+y^2+2x-4y+1)+\lambda(2x+y+4)=0$，即

$$[x+(1+\lambda)]^2+\left(y+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2=\frac{5\lambda^2-16\lambda+16}{4}.$$

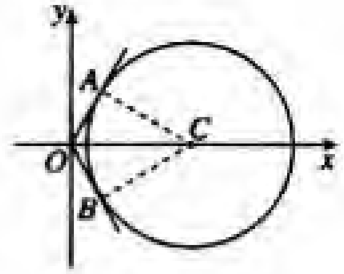
半径长为 r，则 $r^2=\frac{5\lambda^2-16\lambda+16}{4}=\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$.

当 $\lambda=\frac{8}{5}$ 时，r^2 的最小值是 $\frac{4}{5}$，圆面积的最小值是 $\pi R^2=\frac{4}{5}\pi$.

此刻圆 C' 的方程是　$x^2+y^2+\frac{26}{5}x-\frac{12}{5}y+\frac{37}{5}=0$.

说明：数形结合，理解题意. 经过两圆的交点，面积最小的圆就是以公共弦为直径的圆. 直线 l 就是圆 C 与 C' 的公共弦所在的直线方程.

3. 如果实数 x，y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$，那么 $\frac{y}{x}$ 最大值是（　　）.



（第 3 题）

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

解：设 $\frac{y}{x}=k$，问题转化为直线 $y=kx$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 有公共点时，k 的最大值. 数形结合，借助图形观察，可以判断 k 的最大值是 $\sqrt{3}$，最小值是 $-\sqrt{3}$. 选择 (D).

作为选择题，可以多想少算.

说明：借助信息技术，可以改变点 A 的位置，观察直线 OA 的斜率的变化，了解变化范围. 进一步，本题还可以改成求 k 的取值范围.

4. 由一点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 C：$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在直线的方程.

解法一：因为点 $A(-3,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-3,-3)$，设直线 l 的斜率为 k，则过点 A' 的直线 l 的方程为 $y+3=-k(x+3)$，将 $y=-k(x+3)-3$ 代入圆方程，整理得

$$(1+k^2)x^2+2(3k^2+5k-2)x+(9k^2+30k+8)=0,$$

若直线 l 与圆相切，则 $\Delta=0$，即 $12k^2+25k+12=0$，解之得 $k=-\frac{3}{4}$，或 $k=-\frac{4}{3}$.

所以，所求直线 l 的方程为 $y-3=-\frac{3}{4}(x+3)$，或 $y-3=-\frac{4}{3}(x+3)$.

即 $3x+4y-3=0$，或 $4x+3y+3=0$.

解法二：经配方，已知圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

设光线 l 所在直线的方程为 $y-3=k(x+3)$，

因为 $k\neq0$，令 $y=0$，得 $x=\frac{-3(1+k)}{k}$，

所以，反射点为 $\left(\frac{-3(1+k)}{k},0\right)$.

由于光线的入射角等于反射角，所以反射光线 l' 所在直线方程为

$$y=-k\left[x+\frac{3(1+k)}{k}\right]，即\ kx+y+3(1+k)=0.$$

又因为直线 l 与圆相切，所以 $\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

整理，得 $12k^2+25k+12=0$，

解之，得 $k=-\frac{3}{4}$，或 $k=-\frac{4}{3}$.

所以，所求直线 l 的方程为 $y-3=-\frac{3}{4}(x+3)$，或 $y-3=-\frac{4}{3}(x+3)$，

即 $3x+4y-3=0$，或 $4x+3y+3=0$.

说明：这是与物理学科结合的题. 涉及光线问题，常常用对称法来解.

5. 从圆 C：$x^2+y^2-4x-6y+12=0$ 外一点 $P(a,b)$ 向圆作切线 PT，T 为切点，且 $|PT|=|PO|$（O 为原点），求 $|PT|$ 的最小值以及此刻点 P 的坐标.

解：由已知，圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆心 C 的坐标是 $(2,3)$，半径长 $r=1$.

如图，连结 PC、CT. 由平面几何，

$$|PT|^2=|PC|^2-|CT|^2=(a-2)^2+(b-3)^2-1.$$

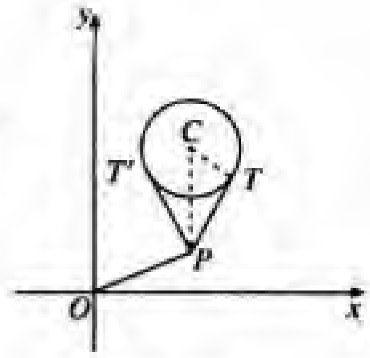
由已知，$|PT|=|PO|$，所以 $|PT|^2=|PO|^2$。

即
$$(a-2)^2+(b-3)^2-1=a^2+b^2.$$

化简得
$$2a+3b-6=0. \quad ①$$
$$|PT|^2=|PO|^2=a^2+b^2, \quad ②$$

①、②消去 b，得 $|PT|^2=\frac{1}{9}(13a^2-24a+36)$.

当 $a=\frac{12}{13}$时，$|PT|_{min}=\frac{1}{3}\sqrt{13\times\left(\frac{12}{13}\right)^2-24\times\frac{12}{13}+36}=\frac{6}{13}\sqrt{13}$.



（第 5 题）

$|PT|$ 的最小值为$\frac{6}{13}\sqrt{13}$，

此刻点 P 的坐标是$\left(\frac{12}{13},\frac{18}{13}\right)$.

说明：结合图形分析直线与圆的关系，然后根据条件求二此函数的最小值，有一定的综合性.

在 $2a+3b-6=0$ 的条件下求 $|PT|^2=a^2+b^2$的最小值，还可以把 $2a+3b-6=0$ 看成直线，$a^2+b^2=|PT|^2$看成圆，利用直线与圆相切，求出 $|PT|^2$ 最小值.

四、教学设计案例

圆与圆的位置关系

1. 教学任务分析

学生已经有的相关知识是，两圆位置关系的分类：相离、外切、相交、内切、内含；判别位置关系的依据：

(1) 连心线的长$>r_1+r_2$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 相离；

(2) 连心线的长$=r_1+r_2$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 外切；

(3) 当 $|r_1-r_2|<$连心线的长$<r_1+r_2$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 相交；

(4) 当连心线的长$=|r_1-r_2|$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 内切；

(5) 当连心线的长$<|r_1-r_2|$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 内含.

另外，学生也已经知道，直线，圆可以用方程来表示，通过它们的方程组成的方程组有没有实数解来判断它们间的位置关系.

这一节课的任务是：用坐标法判断两圆的位置关系．因此，一方面，把几何关系代数化；另一方面，通过方程的研究来判断两圆的位置关系．教学中应该围绕这两个方面展开.

在教学过程中，以问题为载体，在教师的帮助下，引导学生分析、研究问题，制订解决问题的策略，选择解决问题的方法．通过问题的解决，让学生参与教学过程．在这个过程中，教师尊重学生的思维过程，充分发挥学生在学习中的主动性以及他们之间的合作交流.

2. 教学重点、难点

用坐标法判断两圆的位置关系.

3. 教学基本流程

教学的基本流程如下图所示.

提出问题

↓

学生研究、合作解决问题

↓

教师引导学生交流解题方法

↓

归纳各自方法特点，重点突出解析法

↓

其他变式问题（巩固经验）

↓

引导学生小结

4. 教学情境设计

（1）教师帮助学生回忆初中几何曾经学习过的两圆位置关系的分类以及已经有的解决问题的经验.

教师提出：两圆有哪些位置关系？

学生不难回答这一问题.

教师再提出，上一节课，我们是怎样研究直线与圆的位置关系的.

学生可能从两个方面回答这一问题. 这就是

根据圆心到直线的距离；根据直线的方程与圆的方程组成的方程组实数解的情况.

（2）提出问题：

设圆 C_1：$x^2+y^2+2x+8y-8=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-4x-4y-2=0$，试判断圆 C_1 与圆 C_2 的关系（教科书的例 3）.

让学生互相讨论、解答. 可以请几个学生板演. 教师不必过多干预，给学生解决问题的时间.

过一段时间后，交流解法，或者评论板演的同学中出现的不同解法各自的特点，并请板演同学说明理由.

如果在板演的同学中只出现一种解法（可能利用平面几何结论而不是考虑方程组的解），则询问其他同学有没有其他不同解法.

教师还应该关注，有多少学生画出了图形，并表扬画出图形的同学. 强调解析几何是一门数与形结合的学科，加强“数形结合”的意识.

（3）问题的两种解法：

解法一：把圆 C_1 的方程化成标准形式，得

$$(x+1)^2+(y+4)^2=25.$$

圆 C_1 的半径长 $r_1=5$，圆心是点 $(-1,-4)$.

把圆 C_2 的方程化成标准形式，得

$$(x-2)^2+(y-2)^2=10.$$

圆 C_2 的半径长 $r_2=\sqrt{10}$，圆心是点 $(2,2)$.

圆 C_1 与圆 C_2 的连心线的长为

$$\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5}.$$

圆 C_1 与圆 C_2 的两半径长之和 $r_1+r_2=5+\sqrt{10}$，两半径长之差 $r_1-r_2=5-\sqrt{10}$.

而 $5-\sqrt{10}<3\sqrt{5}<5+\sqrt{10}$，所以圆 C_1 与圆 C_2 相交，如图 4-9，它们有两个不同的公共点 A，B.

解法二：圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得到方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ①\\ x^2+y^2-4x-4y-2=0. & ②\end{cases}$$

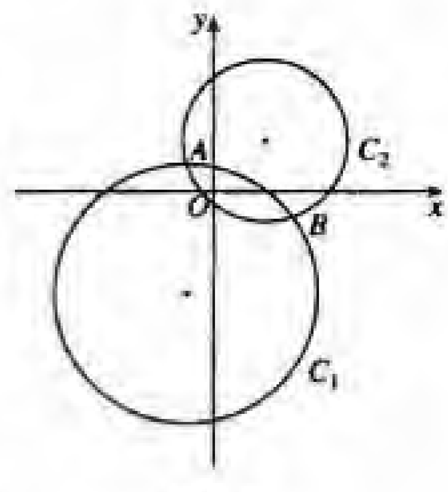


图 4-9

①－②，得

$$x+2y-1=0. \quad ③$$

由③，得

$$y=\frac{1-x}{2}.$$

把上式代入①，并整理，得

$$x^2-2x-3=0. \quad ④$$

方程④根的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=(-2)^2-4\times1\times(-3)\\&=16>0.\end{aligned}$$

所以，方程④有两个不相等的实数根 x_1，x_2. 把 x_1，x_2 分别代入方程③，可以求出 y_1，y_2.

因此圆 C_1 与圆 C_2 有两个不同的公共点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

由于本题只要判断圆 C_1 与圆 C_2 是否有公共点，并不要求出公共点的坐标，因此不必解方程④，求出两个实数根.

（4）第二种解法，是讨论由两个圆的方程组成的方程组解的情况，然后判断两圆相应的位置关系，突出坐标法的特点.

解法二中，把圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得到方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x+8y-8=0, & ①\\ x^2+y^2-4x-4y-2=0. & ②\end{cases}$$

①－②，得 $$x+2y-1=0. \quad ③$$

教科书给出的思考"画出圆 C_1 与 C_2 以及方程③表示的直线，你发现了什么？你能说明为什么吗？"

如图 4-10，方程③所表示的直线是两圆公共弦所在的直线.

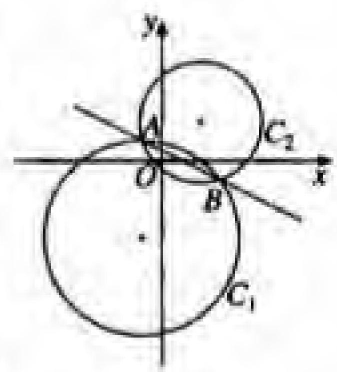


图 4-10

因为由方程①、②组成的方程组的解 (x, y) 必是方程③的解，如果方程组有两组实数解，即两圆有两个公共点，这两个公共点必在方程③确定的直线上，两点确定一条直线，方程③表示的直线就是两圆的公共弦所在的直线.

这样一来，圆 C_1 与 C_2 公共点的问题就化归为直线 $x+2y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x+8y-8=0$（或者 $x^2+y^2-4x-4y-2=0$）公共点的问题.

于是，就可以先求圆心 $(-1, -4)$（或者 $(2, 2)$）到直线 $x+2y-1=0$ 的距离 d，再把 d 与圆 $x^2+y^2+2x+8y-8=0$（或者 $x^2+y^2-4x-4y-2=0$）的半径长 r_1（或者 r_2）进行大小比较，来判断关系.

这是已经解决的问题. 典型的化归思想！

（5）两圆如果没有公共点或者相切，也能把两个圆的关系的研究化归为直线与圆的位置关系来研究吗？教师可以提出一个研究性学习课题，让学生课后去试一试，课堂上不必展开.

（6）例题只要判断圆 C_1 与圆 C_2 是否有公共点，并不要求出公共点的坐标，因此不必求出方程组的两组实数根.

事实上，解方程组可得 $\begin{cases}x=3,\\ y=-1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$

因此圆 C_1 与圆 C_2 有两个公共点，它们的坐标为 $(3, -1)$ 和 $(-1, 1)$.

(7) 在解法一中，要判断圆 C_1 与 C_2 相交，不仅需要判断连心线的长与 r_1+r_2 的关系，还要判断连心线的长与 $|r_1-r_2|$ 的关系，因为只有当

$|r_1-r_2|<$连心线的长$<r_1+r_2$ 时，才能说明圆 C_1 与 C_2 相交.

(8) 简要归纳解题经验.

研究两圆的位置关系可以有两种方法：

一种是利用平面几何结论；另一种是转化为方程组解的问题.

(9) 若时间允许，可以让学生练习第 139 页的"练习"中的第 2 题.

(10) 布置作业：

第 139 页练习第 1，3，4 题，共 3 个小题.

5. 几点说明

整个教学过程，教师应该注意少讲，给学生以充分活动的时间与空间，让学生互相评价，总结解题经验. 教师的重点放在解法的归纳以及坐标法的思想是否得到落实等工作上.

6. 补充例题

点 M 在圆心为 C_1 的方程 $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ 上，点 N 在圆心为 C_2 的方程 $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ 上，求 $|MN|$ 的最大值.

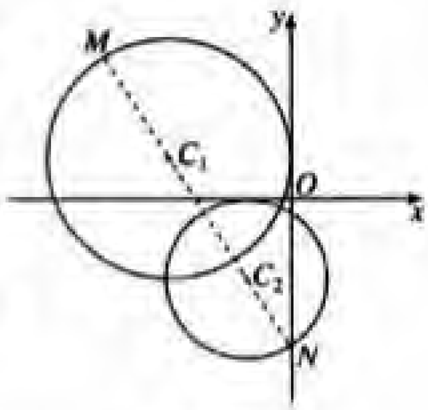


图 4-11

解：把圆的方程都化成标准形式，得

$$(x+3)^2+(y-1)^2=9,$$
$$(x+1)^2+(y+2)^2=4.$$

C_1 的坐标是 $(-3, 1)$，半径长是 3；C_2 的坐标是 $(-1, -2)$，半径长是 2. 所以，

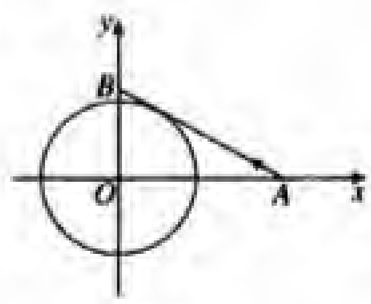
$$|C_1C_2|=\sqrt{(-3+1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}.$$

因此，$|MN|$ 的最大值是 $\sqrt{13}+5$（图 4-11）.

五、习题解答

练习（第 136 页）

1. 解：以台风中心为原点 O，东西方向为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系，其中，取 10 km 为单位长度.



（第 1 题）

这样，受台风影响的圆形区域所对应的圆 O 方程为

$$x^2+y^2=9;$$

轮船航线所在直线 l 的方程为

$$4x+7y-28=0.$$

问题归结为圆 O 与直线 l 有无公共点.

点 O 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|0+0-28|}{\sqrt{65}}=\frac{28}{\sqrt{65}}\approx3.5,$$

圆 O 的半径长 $r=3$.

因为 $3.5>3$，所以，这艘轮船不必改变航线，不会受到台风的影响.

2. 解：因为原点 O 到直线 $4x+3y-35=0$ 的距离

$$d=\frac{|0+0-35|}{\sqrt{4^2+3^2}}=7.$$

圆心在原点，与直线 $4x+3y-35=0$ 相切的圆方程是

$$x^2+y^2=49.$$

3. 方程 $x^2+y^2-2x=0$ 经过配方，得

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

圆心坐标是 $(1,\ 0)$，半径长 $r=1$.

圆心到直线 $3x+4y+2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|3+0+2|}{5}=1.$$

因为 $d=r$，所以直线 $3x+4y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 相切.

4. 圆 C 的圆心坐标是 $(0,\ 1)$，半径长 $r=\sqrt{5}$，圆心到直线 $y=x+6$ 的距离 $d=\frac{5\sqrt{2}}{2}>\sqrt{5}$，所以直线 l 与圆 C 无公共点.

练习（第 137 页）

解法一：圆 C_1 的方程配方，得 $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

圆心的坐标是$\left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$，半径长 $r_1=\frac{3}{2}$.

把圆 C_2 的方程配方，得 $(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$.

圆心的坐标是$\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$，半径长 $r_2=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

连心线的距离$=\sqrt{(-1+2)^2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}=1$.

两半径长之和 $r_1+r_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$，差为 $r_1-r_2=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

因为$\frac{\sqrt{17}-3}{2}<1<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$，

所以两圆相交.

解法二：方程 $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ 与 $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ 相减，得

$$x=-\frac{1}{2}.$$

把 $x=-\frac{1}{2}$代入 $x^2+y^2+2x+3y+1=0$，得

$$4y^2+12y+1=0.$$

根的判别式 $\Delta=144-16>0$，方程 $4y^2+12y+1=0$ 有两个实数根，因此圆 C_1 与 C_2 相交.

练习（第 140 页）

1. 解法一：由已知，圆 C 的圆心坐标是 $(3,\ 0)$，半径长 $r=3$. 圆心到直线 $2x-y-2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|2\times3-0-2|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

直线 $2x-y-2=0$ 被圆截得的弦长是 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-\frac{16}{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{145}$.

解法二：由 $2x-y-2=0$ 与$(x-3)^2+y^2=9$ 消去 y，得

$$5x^2-14x+4=0.$$

根据根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=\frac{14}{5},\ x_1x_2=\frac{4}{5}.$$

设直线 $2x-y-2=0$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=9$ 交于点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

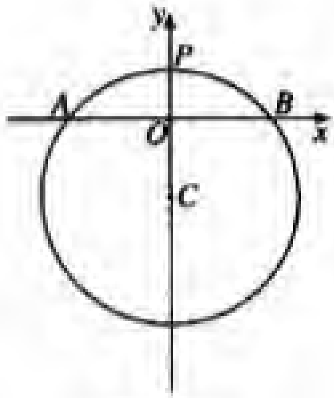
$$=\sqrt{(1+2^2)\left[\left(\frac{14}{5}\right)^2-4\times\frac{4}{5}\right]}$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{145}.$$

直线 $2x-y-2=0$ 被圆 $(x-3)^2+y^2=9$ 截得的弦长是 $\frac{2}{5}\sqrt{145}$.

2. 解：建立如图所示的直角坐标系. $|OP|=7.2$ m，$|AB|=37.4$ m. 即有

$$A(-18.7,0),\ B(18.7,0),\ C(0,7.2).$$



（第 2 题）

设所求圆的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

于是有

$$\begin{cases}(a+18.7)^2+b^2=r^2,\\(a-18.7)^2+b^2=r^2,\\a^2+(b-7.2)^2=r^2.\end{cases}$$

解此方程组，得

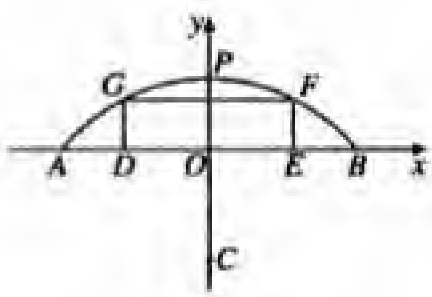
$$a=0,\ b=-20.7,\ r=27.9.$$

所以这座圆拱桥的拱圆的方程是

$$x^2+(y+20.9)^2=27.9^2\ (0\leqslant y\leqslant 7.2).$$

3. 解：建立如图所示的坐标系. 依题意，有

$$A(-10,0),\ B(10,0),\ P(0,4),\ D(-5,0),\ E(5,0).$$



（第 3 题）

设所求圆的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 于是有

$$\begin{cases}(a+10)^2+b^2=r^2,\\(a-10)^2+b^2=r^2,\\a^2+(b-4)^2=r^2.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$a=0,\ b=-10.5,\ r=14.5.$$

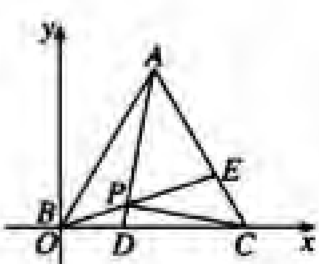
所以这座圆拱桥的拱圆的方程是

$$x^2+(y+10.5)^2=14.5^2\quad(0\leqslant y\leqslant 4).$$

把点 D 的横坐标 $x=-5$ 代入上式，得 $y=3.1$.

由于船在水面以上高 3 m，$3<3.1$，所以该船可以从桥下穿过.

4. 解：以 B 为原点，以 BC 所在的直线为 x 轴，线段 BC 长的 $\frac{1}{6}$ 为单位长，建立如图所示的坐标系. 则



（第 4 题）

$A(3, 3\sqrt{3})$，$B(0, 0)$，$C(6, 0)$.

由已知，得 $D(2, 0)$，$E(5, \sqrt{3})$.

直线 AD 的方程为 $y=3\sqrt{3}(x-2)$.

直线 BE 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{5}(x-5)+\sqrt{3}$.

解以上两方程联立成的方程组，得

$$x=\frac{15}{7},\ y=\frac{3}{7}\sqrt{3}.$$

所以，点 P 的坐标是 $\left(\frac{15}{7},\ \frac{3}{7}\sqrt{3}\right)$.

直线 PC 的斜率 $k_{PC}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$.

因为 $k_{AD}\cdot k_{PC}=3\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=-1$，

所以，$AP\perp CP$.

习题 4.2　A 组

1. 解：因为圆心 $O(0,\ 0)$ 到直线 $4x-3y=50$ 的距离

$$d=\frac{|0+0-50|}{5}=10,$$

而圆的半径长是 10，所以直线与圆相切.

圆心与切点连线所得直线的方程为　$3x+4y=0$.

解方程组 $\begin{cases}4x-3y=50,\\3x+4y=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=8,\\y=-6.\end{cases}$

切点坐标是 $(8,\ -6)$.

2. 解：(1) 因为圆心 $M(3,\ -5)$ 到直线 $x-7y+2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|3-7(-5)+2|}{\sqrt{1+(-7)^2}}=4\sqrt{2},$$

所以，圆心为 $N(3,\ -5)$ 与直线 $x-7y+2=0$ 相切的圆的方程是

$$(x-3)^2+(y+5)^2=32.$$

(2) 依题意，所求的圆有两个.

它们的方程是 $x^2+(y-1)^2=25$，或 $x^2+(y-11)^2=25$.

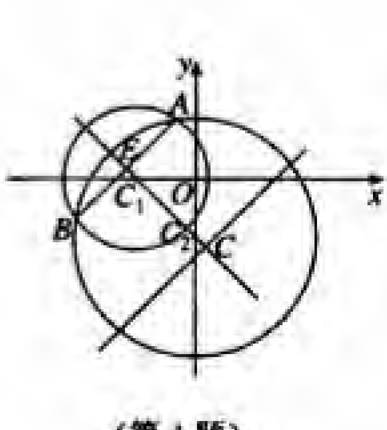
3. 解：因为点 $N(1,\ 3)$ 到直线 $3x-4y-7=0$ 的距离

$$d=\frac{|3-4\times3-7|}{5}=\frac{16}{5}.$$

所以，以 $N(1,\ 3)$ 为圆心，且与直线 $3x-4y-7=0$ 相切的圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-3)^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2.$$

4. 解法一：设两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 相交于点 A，B.



（第 4 题）

解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+6x-4=0,\\x^2+y^2+6y-28=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=-1\\y=3;\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-6\\y=-2.\end{cases}$$

所以，$A(-1,\ 3)$，$B(-6,\ -2)$.

直线 AB 的垂直平分线的方程是 $x+y+3=0$.

$x+y+3=0$ 与 $x-y-4=0$ 联立，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{7}{2}. \end{cases}$

所求圆的圆心 C 坐标是 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$.

点 C 到点 A 的距离

$$|CA|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{7}{2}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{89}{2}}.$$

所求圆的方程为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{89}{2}$，即

$$x^2+y^2-x+7y-32=0.$$

解法二：设经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 交点的圆的方程为

$$x^2+y^2+6x-4+\lambda(x^2+y^2+6y-28)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+6x+6\lambda y-4-28\lambda=0.$$

其圆心坐标是 $\left(-\dfrac{3}{1+\lambda}, -\dfrac{3\lambda}{1+\lambda}\right)$.

因为圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，所以有

$$\frac{3}{1+\lambda}-\frac{3\lambda}{1+\lambda}+4=0.$$

解得　$\lambda=-7$.

所以，所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x-4-7(x^2+y^2+6y-28)=0$，即

$$x^2+y^2-x+7y-32=0.$$

5. 解法一：设直线 l 与圆 C 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$. 把直线 l 的方程 $3x-y-6=0$ 与圆 C 的方程 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 联立，消去 y，得

$$x^2-5x+6=0.$$

根据根与系数的关系，有　$x_1+x_2=5$，$x_1x_2=6$.

直线 l 被圆 C 截得的弦 AB 长

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}\\&=\sqrt{(1+3^2)(5^2-4\times6)}\\&=\sqrt{10}.\end{aligned}$$

解法二：把圆 C 的方程配方化成标准形式，得 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

圆心的坐标是 $(1, 2)$，半径长 $r=\sqrt{5}$.

圆心 C 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|3-2-6|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

弦 AB 的长 $|AB|=2\sqrt{5-\dfrac{5}{2}}=\sqrt{10}$.

6. 解：设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

圆心到直线 $x-y=0$ 的距离是　$d=\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$.

依题意，有

$$\begin{cases} b^2=r^2, \\ 3a-b=0, \\ \dfrac{(a-b)^2}{2}+7=r^2. \end{cases}$$

解此方程组，得 $a=1$，$b=3$，$r^2=9$；或 $a=-1$，$b=-3$，$r^2=9$.

所以，所求的圆的方程有两个，它们分别是

$$(x-1)^2+(y-3)^2=9，或 (x+1)^2+(y+3)^2=9.$$

7. 解：把圆 C 的方程化成标准形式，得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}.$$

圆心坐标是 $\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$.

设与圆 C 关于直线 l 对称的点是 $C'(x_0,\ y_0)$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{y_0+1}{x_0-\frac{1}{2}}=-1, \\ \dfrac{x_0+\frac{1}{2}}{2}-\dfrac{y_0-1}{2}+1=0. \end{cases}$$

解此方程组，得 $x_0=-2$，$y_0=\frac{3}{2}$.

所以圆 C 的圆心的坐标是 $\left(-2,\ \frac{3}{2}\right)$.

所以，与圆 C 关于直线 l：$x-y+1=0$ 对称的圆的方程是

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

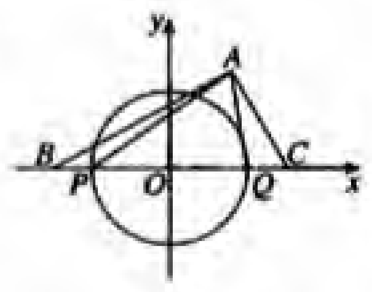
8. 证明：如图，以 O 为原点，分别以直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系.

于是有

$B(-m,\ 0)$，$C(m,\ 0)$，$P(-n,\ 0)$，$Q(n,\ 0)$.

设 $A(x,\ y)$，由已知，点 A 在圆 $x^2+y^2=m^2$ 上.

$$\begin{aligned} &AP^2+AQ^2+PQ^2 \\ =&(x+n)^2+y^2+(x-n)^2+y^2+4n^2 \\ =&2x^2+2y^2+6n^2=2m^2+6n^2(定值). \end{aligned}$$



（第 8 题）

9. 解法一：由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2-4=0, \\ x^2+y^2-4x+4y-12=0 \end{cases}$ 消去二次项，得 $y=x+2$.

把 $y=x+2$ 代入 $x^2+y^2-4=0$，得 $x^2+2x=0$.

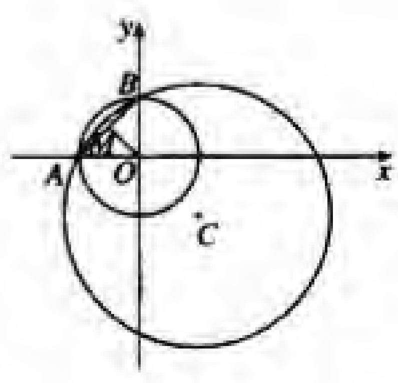
解得 $x_1=-2$，$x_2=0$. 于是有 $y_1=0$，$y_2=2$，所以两圆交点坐标是

$A(-2,\ 0)$，$B(0,\ 2)$. 公共弦长 $|AB|=2\sqrt{2}$.

解法二：由方程 $x^2+y^2-4=0$ 与 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 消去二次项，得 $y=x+2$.

圆 O 的圆心到直线 l：$x-y+2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$



（第 9 题）

如图，过 O 作弦 AB 的垂线，垂足是 M. 因为圆 O 的半径长是 2，所以

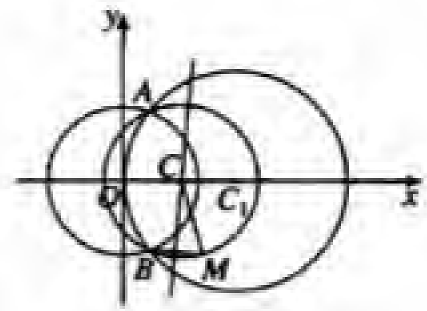
$|OA|=2$. 在$\triangle OAM$中，$|MA|=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$. 所以，两圆公共弦长为$|AB|=2|MA|=2\sqrt{2}$.

10. 解法一：联立方程 $x^2+y^2-6x=0$、$x^2+y^2=4$ 得方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-6x=0,\\ x^2+y^2=4.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ y=\dfrac{4}{3}\sqrt{2};\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ y=-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}.\end{cases}$$



(第 10 题)

两圆交点为 $A\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right)$，或 $B\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right)$.

线段 BM 的中点坐标是$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{2}-1\right)$，

直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{2}$.

线段 BM 的垂直平分线的方程是

$$y=2(3+2\sqrt{2})\left(x-\frac{4}{3}\right)-\frac{2}{3}\sqrt{2}-1.$$

线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y=0$(x 轴).

因此，把 $y=0$ 代入 $y=2(3+2\sqrt{2})\left(x-\dfrac{4}{3}\right)-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}-1$，得 $x=\dfrac{3}{2}$.

圆心 C 的坐标是$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$.

半径长 $r=|CM|=\sqrt{\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2+(-2)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

以 C 为圆心的圆的方程为$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{17}{4}$，

即　$x^2+y^2-3x-2=0$.

解法二：设经过圆 $x^2+y^2-6x=0$ 与 $x^2+y^2=4$ 交点的圆的方程为

$$x^2+y^2-6x+\lambda(x^2+y^2-4)=0. \quad ①$$

把点 M 的坐标 $(2,\ -2)$ 代入①式，得

$$2^2+(-2)^2-6\times 2+\lambda[2^2+(-2)^2-4]=0.$$

解方程，得　$\lambda=1$.

把 $\lambda=1$ 代入方程①，并化简得

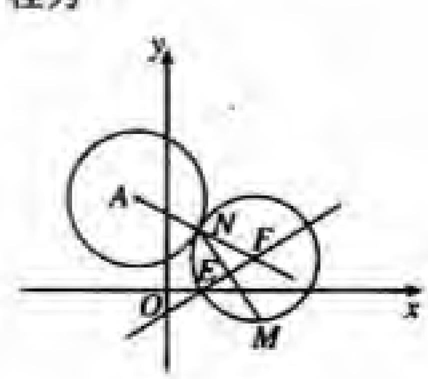
$$x^2+y^2-3x-2=0.$$

所以，经过圆 $x^2+y^2-6x=0$ 与 $x^2+y^2=4$ 交点的圆的方程为

$$x^2+y^2-3x-2=0.$$

11. 解：把圆 C 的方程 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 化成标准形式，得

$$(x+1)^2+(y-3)^2=5.$$



(第 11 题)

圆 C 的圆心坐标是 $(-1,\ 3)$，半径长是$\sqrt{5}$.

直线 AN 的方程为　$x+2y-5=0$.

MN 的中点坐标是$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$，斜率是$-\dfrac{3}{2}$.

线段 MN 的垂直平分线的方程是 $y-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}(x-2)$，即

$$4x-6y-5=0.$$

联立 $x+2y-5=0$ 与 $4x-6y+1=0$ 解得

$x=\frac{20}{7}$，$y=\frac{15}{14}$.

这是所求圆的圆心 F 的坐标.

又因为
$$|FN|^2=\left(\frac{20}{7}-1\right)^2+\left(\frac{15}{14}-2\right)^2=\frac{845}{196},$$

经过点 $M(3,\ -1)$，且与圆 C：$x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切于点 $N(1,\ 2)$ 的圆的方程是

$$\left(x-\frac{20}{7}\right)^2+\left(y-\frac{15}{14}\right)^2=\frac{845}{196}.$$

B 组

1. 解：以 A 为原点，直线 AB 为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系.

由已知，得 $A(0,\ 0)$，$B(160,\ 0)$.

点 C 在以 B 为圆心，以圆 C 与圆 B 的半径和 185 为半径的圆上，方程为

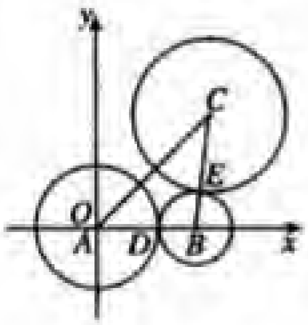
$$(x-160)^2+y^2=185^2.$$

又点 C 在直线 AC 上，上式与 $y=x$ 联立，解得

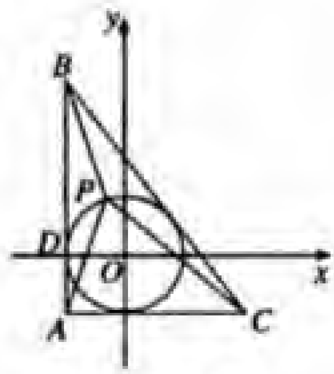
$$x\approx 183.5\ \text{cm}.$$

所以点 C 的坐标为 $(183.5,\ 183.5)$.

A，C 两齿轮中心的距离 $|AC|=\sqrt{183.5^2+183.5^2}=259.5$ (cm).



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 解：设点 P 的坐标是 $(x,\ y)$，则

$$\begin{aligned}d&=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\&=(x+2)^2+(y+2)^2+(x+2)^2+(y-6)^2+(x-4)^2+(y+2)^2\end{aligned}$$

注意到 $x^2+y^2=4$，上式化简为 $d=80-4y$.

由 $x^2+y^2=4$ 可得 $-2\leqslant y\leqslant 2$.

所以，d 的最大值是 88，最小值是 72.

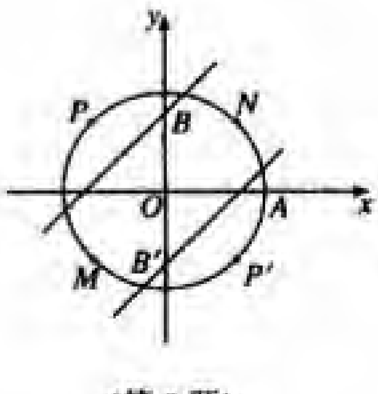
3. 解：由已知，圆 $x^2+y^2=4$ 的半径长是 2.

设 $P(x,\ y)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，圆心 O 到直线 l 的距离为 $\frac{|b|}{\sqrt{2}}$.

令 $\frac{|b|}{\sqrt{2}}=1$，则 $b=\pm\sqrt{2}$.

当 $b=\sqrt{2}$ 时，与直线 $y=x+\sqrt{2}$ 平行且距离等于 1 的直线是

$$y=x,\ y=x+2\sqrt{2}.$$



（第 3 题）

直线 $y=x+2\sqrt{2}$与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，切点到直线 $y=x+\sqrt{2}$的距离是 1；直线$y=x$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交，两个交点与直线 $y=x+\sqrt{2}$的距离是 1. 因此当 $b=\sqrt{2}$时，圆 $x^2+y^2=4$ 上有 3 个点到直线 l 的距离都是 1.

同理，当 $b=-\sqrt{2}$时，圆 $x^2+y^2=4$ 上也有 3 个点到直线 l 的距离都是 1.

综合以上得，当 $b=\pm\sqrt{2}$时，圆 O 上恰有 3 个点到直线 l 的距离都等于 1.

画出图形，不难验证以上解答的正确性.

4. 解：(1) 当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$时，直线 AB 的斜率

$$k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1.$$

直线 AB 的方程为

$$y-2=-(x+1),$$

即

$$y=-x+1. \quad ①$$

把①代入 $x^2+y^2=8$，得

$$x^2+(-x+1)^2=8,$$

即

$$2x^2-2x-7=0,$$

解此方程得

$$x=\frac{1\pm\sqrt{15}}{2}.$$

所以，

$$|AB|=\frac{|x_1-x_2|}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{15}=\sqrt{30}.$$

(2) 当弦 AB 被点 P_0 平分时，$OP_0\perp AB$. 直线 OP_0 的斜率为-2，所以直线 AB 的斜率为$\frac{1}{2}$. 根据直线的点斜式方程，直线 AB 的方程为

$$y-2=\frac{1}{2}(x+1),$$

即

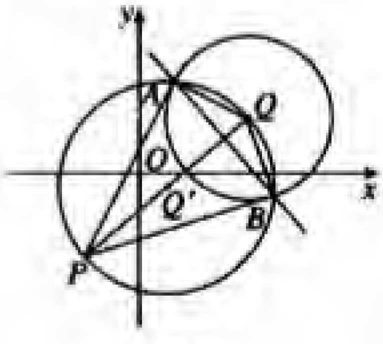
$$x-2y+5=0.$$

5. 解：(1) 因为 $P(-2,-3)$，$Q(4,2)$ 是以 Q'为圆心的圆的直径的两个端点，所以以 Q'为圆心的圆的方程是

$$(x+2)(x-4)+(y+3)(y-2)=0.$$

即

$$x^2+y^2-2x+y-14=0.$$



(第 5 题)

(2) PA，PC 是圆$(x-4)^2+(y-2)^2=9$ 的切线.

因为点 A，B 在圆 $x^2+y^2-2x+y-14=0$ 上，且 PQ 是直径，

所以 $PA\perp AQ$，$PB\perp BQ$.

所以，PA，PB 是圆$(x-4)^2+(y-2)^2=9$ 的切线.

(3) 两方程$(x-4)^2+(y-2)^2=9$，$x^2+y^2-2x+y-14=0$ 相减，得

$$6x+5y-25=0.$$

这就是直线 AB 的方程.

4.3 空间直角坐标系

一、本节知识结构

本节由两部分组成，空间直角坐标系以及空间两点间的距离公式．它们的关系如下列框图所示．

空间直角坐标系

↓

空间两点间的距离公式

二、教学重点与难点

建立空间直角坐标系．

三、编写意图与教学建议

4.3.1 空间直角坐标系

1．通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性，了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置．

教科书一开始，采用与平面直角坐标系类比的方式提出了一个问题：空间的点如何表示呢？以引起学习动机．

这里还可以简要介绍，在生产实践、生活实践中，往往需要研究空间图形，如空间的两点之间的距离，或者空间平面、曲面，以引起学习的兴趣．

介绍空间直角坐标系时，可以从平面直角坐标系开始，使得学生感受到只要在平面直角坐标系的基础上再增加一根竖轴（z 轴），就成了空间直角坐标系．

因为学生对正方体比较熟悉，因此，空间直角坐标系的建立过程可以借助正方体进行．

建立空间直角坐标系象建立平面直角坐标系一样，要强调“三要素”，即原点、坐标轴方向、单位长．这是学生容易忽视的．

2．教科书说明了什么叫“右手直角坐标系”．

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，中指指向 z 轴的正方向，则称这样建立得直角坐标系为右手直角坐标系．

还可以解释成，先把大拇指指向 z 轴方向，把其余 4 指指向 x 轴方向，然后握成拳头，这时 4 指扫过原平面直角坐标系的第一象限从 x 轴正方向到 y 轴正方向．这样与物理中的右手定则联系起来，动态的解释，学生容易理解什么是右手直角坐标系．

教科书指出，在平面上画空间直角坐标系 $O-xyz$ 时，一般使 $\angle xOy=135^\circ$，$\angle yOz=90^\circ$，即用斜二测方法画立体图．这里显然要注意在 y 轴、z 轴上的都取原来的长度，而在 x 轴上的长度取原来长

度的一半．学生容易把 x 轴上的长度取成实长，这就不符合斜二测方法作图的约定，直观性差．

3. 教科书说明了空间一点坐标的意义．这里说明了正反两个方面．如图 4-12，设点 M 为空间直角坐标系中的一点，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P，Q，R．设点 P，Q，R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，那么点 M 就有唯一确定的有序实数组 $(x,\ y,\ z)$．

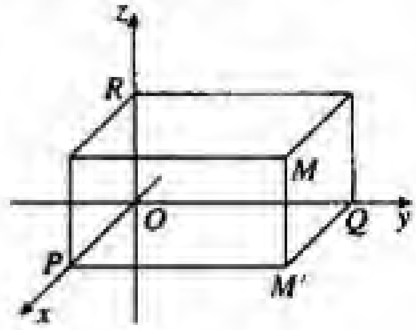


图 4-12

反过来，给定有序实数组 $(x,\ y,\ z)$，我们可以在 x 轴，y 轴和 z 轴上依次取坐标为 x，y 和 z 的点 P，Q 和 R，分别过 P，Q 和 R 各作一个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，这三个平面的唯一的交点就是有序实数组 $(x,\ y,\ z)$ 确定的点 M．

4. 给出具体的点写出它在空间直角坐标系中的坐标、给出空间直角坐标系中的坐标画出这个点是本节教学的主要内容，因此要在这方面加强练习．这不仅可以加深学生对空间直角坐标系的认识，也有利于学生空间想象能力的培养．

在这个过程中，还可以针对学生生活的教室，建立空间直角坐标系，然后确定一些点的坐标；还可以再改变空间直角坐标系原点的位置，再指出同一个点的坐标．这样做，可以使得学生不会感到枯燥．

在给出点写出坐标、给出坐标找点的过程中，引导学生感受规律．比如 xOy 平面上的点的竖坐标都是零，yOz 平面上的点的横坐标都是零，xOz 平面上的点的纵坐标都是零．等等．

5. 教科书第 146 页的练习 1 不要忽视．

通过这个练习（建议让学生板演），可以检验学生是否能正确地根据斜二测的规定画出空间直角坐标系，是否能够正确的找出 $A(0,\ 2,\ 4)$，$B(1,\ 0,\ 5)$，$C(0,\ 2,\ 0)$，$D(1,\ 3,\ 4)$ 这些点．

练习中的习题都已经建立了空间直角坐标系．可以给出没有建立空间直角坐标系的图形，要求学生建立坐标系，然后写出一些点的坐标．这样，同一个点，会因不同的学生建立的坐标系不同而形成坐标不同，体现自主学习．

要注意，这里不介绍卦限的概念，在标出各点时，各点的坐标只限于正数或零．

4.3.2　空间两点间的距离公式

1. 通过表示特殊长方体（所有棱分别与坐标轴平行）顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式．

平面直角坐标系中，两点之间的距离公式是学生已有的知识，不难把平面上两点间的距离公式推广到空间．

教科书使学生经历从易到难，从特殊到一般的认识过程．

利用勾股定理，不难得到，在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，任意一点 $P(x,\ y,\ z)$ 到原点的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

教科书提出“如果 $|OP|$ 是定长 r，那么 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示什么图形?”的问题．凭借经验，学生也能够了解“在空间，到一个定点距离等于定长的点的轨迹是球面”．另一方面，在平面直角坐标系中，方程 $x^2+y^2=r^2$ 表示以原点为圆心，半径长为 r 的圆，不难推广到空间 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 表示以原点为球心，半径长为 r 的球面．这并不增加学生的负担，反而会提高学习的兴趣．

2. 与建立平面直角坐标系中两点间的距离公式类似，教科书仍然依据勾股定理，得到空间任意两点间的距离公式．

空间点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$、$P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 间的距离是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

四、习题解答

练习（第 144 页）

1. 略.

2. C、B'、P 各点的坐标分别是 $(0, 4, 0)$，$(3, 4, 3)$，$\left(\frac{3}{2}, 2, 3\right)$.

3. 点 Q 的坐标是$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

练习（第 146 页）

1. (1) $\sqrt{6}$，图略；(2) $\sqrt{70}$，图略.

2. 解：设 $M(0, 0, z)$.

依题意，得

$$\sqrt{(0-1)^2+0+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+3)^2+(z-1)^2}.$$

解得　$z=-3$.

所求点 M 的坐标是 $(0, 0, -3)$.

3. 证明：根据空间两点间距离公式，得

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$

$$|BC|=\sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}=7,$$

$$|AC|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98}.$$

因为 $7+7>\sqrt{98}$，且 $|AB|=|BC|$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

4. 解：由已知，得点 N 的坐标为$\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, 0\right)$，

点 M 的坐标为$\left(\frac{a}{3}, a, \frac{2a}{3}\right)$. 于是

$$|MN|=\sqrt{\left(\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}-a\right)^2+\left(0-\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}a.$$

习题 4.3　A 组

1. 解：(1) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，

与点 $M(x, y, z)$ 关于 x 轴对称的点是 $M_1(x, -y, -z)$；

与点 $M(x, y, z)$ 关于 y 轴对称的点是 $M_1(-x, y, -z)$；

与点 $M(x, y, z)$ 关于 z 轴对称的点是 $M_1(-x, -y, z)$.

2. 解：正六边形 $EFGHIJ$ 各点的坐标分别是

$E\left(0, \frac{a}{2}, a\right)$，$F\left(\frac{a}{2}, 0, a\right)$，$G\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$，$H\left(a, \frac{a}{2}, 0\right)$，$I\left(\frac{a}{2}, a, 0\right)$，$J\left(0, a, \frac{a}{2}\right)$.

3. 解：由已知，点 E、F、P、M 的坐标是

$E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right)$，$F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$，$M\left(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right)$，

$N\left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$，$P\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$，$Q\left(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

这个几何体是正八面体，棱长

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

B 组

1. 解：由已知，得

$$|AB|=\sqrt{(4-10)^2+(1+1)^2+(9-6)^2}=7,$$
$$|BC|=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{98},$$
$$|CA|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7.$$

因为 $|AB|^2+|CA|^2=|BC|^2$，所以△ABC 是直角三角形，其中 BC 是斜边.

2. 解：长方体的长，宽，高分别是 a，b，c. 中心处钛原子的坐标是$(0.5a，0.5b，0.5c)$.

又 $A(0.31a，0.31b，0)$，所以，键长

$$|AE|=\sqrt{(0.5a-0.31a)^2+(0.5b-0.31b)^2+(0.5c)^2}$$
$$=\sqrt{(0.19a)^2+(0.19b)^2+(0.5c)^2}=\sqrt{0.19^2a^2+0.19^2b^2+0.25c^2}.$$

当 $a=b$ 时，键长 $|AE|=\sqrt{0.27a^2+0.25c^2}$.

3. 解：设正方体的棱长为 a.

(1) 当点 P 为对角线 AB 的中点时，点 P 的坐标是$\left(\frac{a}{2}，\frac{a}{2}，\frac{a}{2}\right)$.

因为点 Q 在线段 CD 上，设 $Q(0，a，z)$.

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(z-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}a^2}.$$

当 $z=\frac{a}{2}$时，$|PQ|$ 的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 即

点 Q 在棱 CD 的中点时，$|PQ|$ 有最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(2) 因为 P 在对角线 AB 上运动，Q 是定点，所以当 $PQ\perp AB$ 时，$|PQ|$ 最短. 因为当点 Q 为棱 CD 的中点时，$|AQ|=|BQ|$，△QAB 是等腰三角形，所以，当 P 是 AB 的中点时，$|PQ|$ 取得最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(3) 当点 P 在对角线 AB 上运动，点 Q 在棱 CD 上运动时，$|PQ|$ 的最小值仍然是$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

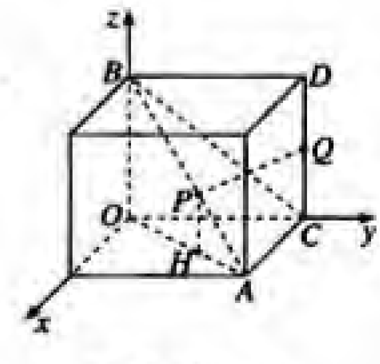
证明：如图，设 $P(x，y，z_1)$. 由正方体的对称性，显然有 $x=y$.

设 P 在平面 OA 上的射影是 H. 在△AOB 中，$\frac{HP}{OB}=\frac{HA}{OA}$，所以$\frac{z_1}{a}=\frac{a-x}{a}$，即有 $x=a-z_1$.

所以，点 P 的坐标是 $(a-z_1，a-z_1，z_1)$.

由已知，可设 $Q(0，a，z_2)$，则

$$|PQ|=\sqrt{(a-z_1)^2+z_1^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(z_2-z_1)+2\left(z_1-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}}.$$



（第 3（3）题）

当 $z_2=z_1=\frac{a}{2}$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

小　结

一、教科书编写意图与教学建议

目的在于回顾本章学习的主要内容，重要的思想方法，使得学生形成系统的知识结构.

1. 本章知识结构. 教科书已经以框图的方式整理给出，这样学生可以对这一章的内容整体上有一个把握，做到清清楚楚几条线.

2. 在回顾与思考部分，小结试图以问题的方式对整章内容进行整理，提出一些需要思考的问题. 这些问题可以让学生经过讨论、回忆，进行总结.

(1) 圆的方程有哪几种形式？你能说出它们各自的特点吗？

圆的方程有标准方程与一般方程.

圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

给出了圆心位置，半径大小.

因为圆的标准方程含有三个参变数 a，b，r，因此必须具备三个独立条件，才能确定圆的标准方程.

对于方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 才表示圆.

圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

也含有三个参变数 D，E，F，因此必须具备三个独立条件，才能确定圆的一般方程.

(2) 直线与圆的问题的研究当然离不开它们之间关系的讨论，引导学生总结判断直线与圆、圆与圆的位置关系的方法. 这就是：

① 曲线 C_1 与 C_2 有无公共点，等价于由它们的方程组成的方程组有无实数解. 方程组有几组实数解，曲线 C_1 与 C_2 就有几个公共点；方程组没有实数解，C_1 与 C_2 就没有公共点.

② 利用初中已有的直线与圆的关系的结论，转化为相应的代数结论.

由于学生在初中已经学习过直线、圆的有关知识，所以，在这两种方法中，学生往往采用第二种方法. 但是，第一种方法更能够体现坐标法的特点，教学中应该注意这两种方法的平衡，不应强调一种而忽视另一种.

(3) 使学生通过问题的解决获得体验，能够自觉采用“三步曲”，使用坐标方法解决平面几何问题：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算结果“翻译”成几何结论.

(4) 本章对空间直角坐标系部分，仅要求学生“了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置.”“通过表示特殊长方体（所有棱分别与坐标轴平行）顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式.”

怎样在平面直角坐标系的基础上建立空间直角坐标系？对比平面直角坐标系与空间直角坐标系中两点间的距离公式异同点.

只要在平面直角坐标系所在平面，经过原点 O 再画一条垂直于这个平面的直线就可以建立空间直角坐标系了. 因为学生已经有平面直角坐标系的经验，所以不会感到困难. 同样，把平面直角坐标系中两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

推广到空间直角坐标系中两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

形式上相同，其不同点是仅仅多了一项，即与竖坐标有关的一项.

(5) 教育改革的一个重要目的是改进学生的学习方式，不可忽视信息技术在改变学生学习方式中所起的作用.

只要条件许可，应该重视信息技术工具在研究几何图形及其位置关系中的作用. 一方面，借助信息技术，通过操作、观察、实验、发现数学规律，形成猜想，并对猜想进行证明；另一方面，用代数的方法，通过研究方程，了解曲线的性质、利用信息技术工具验证，加深对问题的理解. 这样做有利于学生认识数学的本质.

(6) 平面解析几何的基本思想是在平面直角坐标系中，用代数方法研究几何问题，这就是人们常说的“坐标法”. 坐标法是贯穿本章的灵魂，在教学中应该让学生充分地感受、体验.

教科书还通过框图的方式，说明平面解析几何中的坐标法与平面几何中的综合方法、空间直角坐标系与空间解析几何，以及平面中的向量方法的关系. 教学中只要学生了解即可.

二、补充例题

1. 圆 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 与 y 轴交于 A，B 两点，圆心为 P，若 $\angle APB=90°$，求 c 的值.

解：圆的方程 $(x-2)^2+(y+1)^2=5-c$，因为 $\triangle APB$ 为等腰直角三角形，所以 $\sqrt{5-c}=2\sqrt{2}$，所以 $c=-3$.

说明：数形结合分析问题.

2. 求与两平行直线 $x+3y-5=0$ 和 $x+3y-3=0$ 相切，圆心在 $2x+y+3=0$ 上的圆的方程.

解：设所求圆的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

由已知，两平行线之间的距离是

$$d=\frac{|5-3|}{\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

所以，所求圆的半径长是$\frac{1}{\sqrt{10}}$.

所以圆心 (a, b) 到直线 $x+3y-5=0$ 和 $x+3y-3=0$ 的距离都是$\frac{1}{\sqrt{10}}$，于是

$$\frac{|a+3b-5|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}，且\frac{|a+3b-3|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

即 $|a+3b-5|=1$，且 $|a+3b-3|=1$.

又圆心在 $2x+y+3=0$ 上，于是有 $2a+b+3=0$.

解方程组 $\begin{cases}|a+3b-5|=1,\\2a+b+3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-\dfrac{13}{5},\\b=\dfrac{11}{5};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=3.\end{cases}$

当 $\begin{cases}a=-3,\\b=3\end{cases}$ 时，不满足 $|a+3b-3|=1$，

所以，$\begin{cases}a=-\dfrac{13}{5},\\b=\dfrac{11}{5}.\end{cases}$

所以，所求圆的方程为 $\left(x+\dfrac{13}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{5}\right)^2=\dfrac{1}{10}$.

说明：用坐标法解决问题．考查画出图形，利用初中几何知识，分析条件，明确任务，解决问题的能力.

三、习题解答

复习参考题　A 组

1．解：（1）因为所求圆的圆心为点 $C(-5,3)$，经过点 $A(-8,-1)$，半径长

$$r=\sqrt{(8-5)^2+(3+1)^2}=5$$

的圆的方程是

$$(x+5)^2+(y-3)^2=25;$$

（2）经过三点 $A(-2,4)$，$B(-1,3)$，$C(2,6)$.

设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由已知，得

$$\begin{cases}(a+2)^2+(b-4)^2=r^2,\\(a+1)^2+(b-3)^2=r^2,\\(a-2)^2+(b-6)^2=r^2.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$a=0,\ b=5,\ r^2=5.$$

所以，经过三点 $A(-2,4)$，$B(-1,-3)$，$C(2,6)$ 的圆的方程是

$$x^2+(y-5)^2=5.$$

2．解：设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由已知，得

$$\begin{cases}a^2+b^2=r^2,\\(a-3)^2+(b-1)^2=r^2,\\3a+b-5=0.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$a=1,\ b=2,\ r^2=5.$$

所以，经过原点和点（3，1），并且圆心在直线 $3x+y-5=0$ 上的圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5.$$

3. 解：把圆的方程 $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 化成标准形式，得

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25.$$

圆心 C_1 的坐标为 $(3,\ -2)$，半径长 $r_1=5$.

把圆的方程 $x^2+y^2-14x-2y+14=0$ 化成标准形式，得

$$(x-7)^2+(y-1)^2=64.$$

圆心 C_2 的坐标为 $(7,\ 1)$，半径长 $r_2=8$.

两圆圆心之间的距离是 $\sqrt{(3-7)^2+(-2-1)^2}=5$.

$$r_2-r_1=3,\ r_2+r_1=13.$$

因为 $3<5<13$，$r_2-r_1<|C_1C_2|<r_2+r_1$，所以两圆相交，不相切.

4. 解法一：两圆的方程 $x^2+y^2-10x-10y=0$，$x^2+y^2-6x+2y-40=0$ 相减，得公共弦所在的直线 l 方程是

$$x+3y-10=0.$$

把圆的方程 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 化成标准形式，得

$$(x-5)^2+(y-5)^2=50.$$

圆心 $C_1(5,\ 5)$，半径长 $r_1=5\sqrt{2}$.

圆心 $C_1(5,\ 5)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|5+3\times5-10|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}.$$

公共弦长为 $2\sqrt{r_1{}^2-d^2}=2\sqrt{50-10}=4\sqrt{10}$.

解法二：设两圆交于 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 两点.

两圆的方程 $x^2+y^2-10x-10y=0$，$x^2+y^2-6x+2y-40=0$ 相减，得公共弦所在直线 l 的方程是

$$x+3y-10=0，即\ y=\frac{10-x}{3}.$$

把 $y=\frac{10-x}{3}$ 代入 $x^2+y^2-6x+2y-40=0$，并整理得

$$x^2-8x-20=0.$$

$$x_1+x_2=8,\ x_1x_2=-20.$$

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{1}{9}\right)\times(64+80)}\\&=4\sqrt{10}.\end{aligned}$$

5. 解：设所求圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由已知，得

$$\begin{cases}(a-2)^2+b^2=r^2,\\(a-6)^2+b^2=r^2,\\3a+2b=0.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$a=2,\ b=-3,\ r^2=25.$$

所以，圆心在直线 $3x+2y=0$ 上，与 x 轴的交点分别为 $(-2,\ 0)$，$(6,\ 0)$ 的圆的方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

6. 解：方程 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 经配方，得

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4.$$

圆心 C 坐标是 $(-2,\ 2)$，半径长是 2.

圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心坐标是 $(0,\ 0)$，半径长是 2.

因为两圆关于直线 l 对称，所以直线 l 是线段 OC 的垂直平分线.

线段 OC 的中点坐标是 $(-1,\ 1)$，直线 OC 的斜率 $k=-1$，所以直线 l 的方程是 $y-1=x+1$，即 $x-y+2=0$.

7. 解：圆 $C:(x+2)^2+(y-6)^2=1$ 的圆心的坐标是 $(-2,\ 6)$，半径长 $r=1$.

设所求圆 C' 的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由圆 C' 与圆 C 关于直线 $3x-4y+5=0$ 对称知，直线 $3x-4y+5=0$ 是两圆连心线的垂直平分线. 所以有

$$\begin{cases}\dfrac{b-6}{a+2}=-\dfrac{4}{3},\\[2mm] 3\times\dfrac{a-2}{2}-4\times\dfrac{b+6}{2}+5=0.\end{cases}$$

解此方程组，得　$a=4$，$b=-2$.

与圆 $C:(x+2)^2+(y-6)^2=1$ 关于直线 $3x-4y+5=0$ 对称的圆的方程是

$$(x-4)^2+(y+2)^2=1.$$

8. 解：方程 $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ 经配方，得

$$(x-2)^2+(y+m)^2=-m^2+2m+3.$$

半径 $r=\sqrt{-m^2+2m+3}=\sqrt{-(m-1)^2+4}$.

当 $-(m-1)^2+4>0$，即 $(m-1)^2<4$，也就是 $-1<m<3$ 时，$x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ 表示圆.

当 $m=1$ 时，r 的最大值是 2.

此时圆的方程是 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

B 组

1. 解：因为点 $A(2,\ -1)$ 在直线 $x+y=1$ 上，所以经过 $A(2,\ -1)$，与直线 $x+y=1$ 相切的圆的圆心在经过点 A 且与直线 $x+y=1$ 垂直的直线上，该直线的方程是

$$x-y=3.$$

由已知可见，所求圆的圆心 C 在直线 $y=-2x$ 上. 解方程组

$$\begin{cases}x-y-3=0,\\ 2x+y=0\end{cases}$$

得　$x=1$，$y=-2$.

所以圆心 C 的坐标是 $(1,\ -2)$.

因为 $|AC|=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$，所以所求圆的方程为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=2.$$

2. 解：以线段 M_1M_2 的中点为原点，直线 M_1M_2 为 x 轴，建立直角坐标系. 设 $M_1(-c,\ 0)$，$M_2(c,\ 0)$，$M(x,\ y)$，其中 $c>0$.

由已知，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=m\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ (m>0).$$

化简，得

$$(m^2-1)x^2+(m^2-1)y^2-2c(m^2+1)x+(m^2-1)c^2=0. \quad ①$$

当 $m=1$ 时，点 M 在线段 M_1M_2 的垂直平分线上，方程为 $x=0$，即 y 轴；

当 $m\neq1$ 时，方程①配方，得

$$\left[x-\frac{c(m^2+1)}{m^2-1}\right]^2+y^2=\frac{4m^2c^2}{(m-1)^2}.$$

表示圆心在 $\left(\frac{c(m^2+1)}{m^2-1},\ 0\right)$，半径是 $\frac{2mc}{|m-1|}$ 的圆.

3. 解：当 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 时，方程 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 化成

$x^2+y^2=x+y$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

上式表示圆心在 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆.

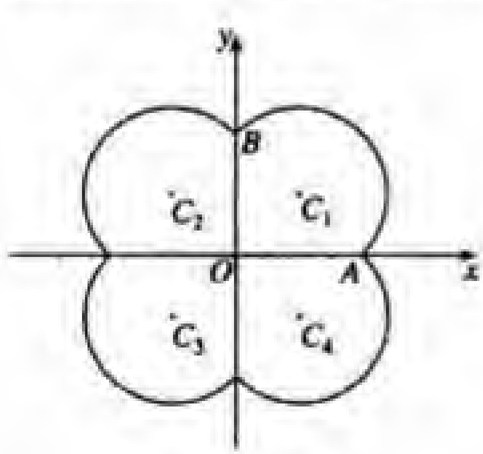
所以，当 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 时，方程 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 表示圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 在第一象限的部分以及 x 轴、y 轴正半轴上的点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$.

同理，当 $x\geqslant0$，$y<0$ 时，方程 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 表示圆 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 在第四象限的部分以及 y 轴负半轴上的点 $(0,\ -1)$；

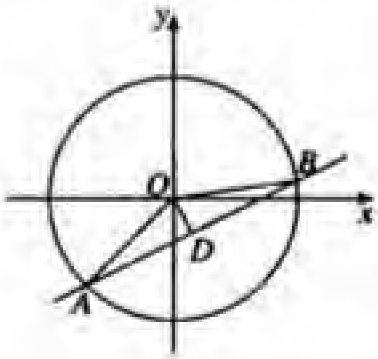
当 $x<0$，$y\geqslant0$ 时，方程 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 表示圆 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 在第二象限的部分以及 x 轴负半轴上的点 $(-1,\ 0)$；

当 $x<0$，$y<0$ 时，方程 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 表示圆 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ 在第三象限部分.

以上合起来构成如图所示的图形，面积为 $2+\frac{\pi}{2}$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 解：(1) 解方程组

$$\begin{cases}x-2y-5=0,\\x^2+y^2=50\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=-5,\\y=-5;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=7,\\y=1.\end{cases}$

所以，直线 l：$x-2y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=50$ 的交点是 $A(-5,\ -5)$，$B(7,\ 1)$.

(2) 过圆心 O 作直线 l 的垂线，垂足为 D，则圆心 O 到直线 l 的距离

$$|OD|=\frac{|-5|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\sqrt{5}.$$

在直角三角形 AOD 中，$|OA|=5\sqrt{2}$，$|AD|=\sqrt{50-5}=3\sqrt{5}$.

所以 $|AB|=6\sqrt{5}$.

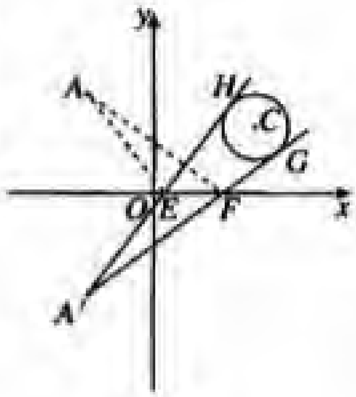
$\triangle AOB$ 的面积　$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB||OD|=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}\times\sqrt{5}=15$.

(3) 在 $\triangle AOD$ 中，$\cos\angle AOD=\frac{|OD|}{|OA|}=\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\approx 0.3162$.

用计算器算得，$\angle AOD=71.57°$.

所以，$\angle AOB=2\angle AOD=143.13°$.

5. 解：根据光的反射原理，作与点 $A(-2,3)$ 关于 x 轴对称的点 $A'(-2,-3)$.



(第 5 题)

从 A 发出得光线经 x 轴反射后，反射线所在的直线就是直线 AE，AF，也就是由 A' 向圆 C 所作的切线.

设切线 l 的方程为 $y+3=k(x+2)$，即 $kx-y+2k-3=0$.

圆心为 C 的圆的半径长是 1，根据圆心 C 到直线 l 的距离等于半径，得

$$\frac{|3k-2+2k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1.$$

解得 $k_1=\frac{4}{3}$，或 $k_2=\frac{3}{4}$.

所以反射光线所在直线的方程为

$$y+3=\frac{4}{3}(x+2)，或 y+3=\frac{3}{4}(x+2).$$

写成一般式是

$$4x-3y-1=0，3x-4y-6=0.$$

6. 解：(1) 直线 l 的方程 $(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$ 经整理得

$$(2x+y-7)m+(x+y-4)=0.$$

由于 m 的任意性，于是有

$$\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $x=3$，$y=1$.

即直线 l 恒过定点 $D(3,1)$.

(2) 因为直线 l 恒经过圆 C 内一点 D，所以（用《几何画板》软件，探究容易发现）当直线经过圆心 C 时被截得的弦最长，它是圆的直径；当直线 l 垂直于 CD 时被截得的弦长最短.

由 $C(1,2)$，$D(3,1)$，可知直线 CD 的斜率为 $k_{CD}=-\frac{1}{2}$，

所以当直线 l 被圆 C 截得弦最短时，直线 l 的斜率为 2，于是

有　$-\frac{2m+1}{m+1}=2$，解得　$m=-\frac{3}{4}$.

此时直线 l 的方程为 $y-1=2(x-3)$，即 $2x-y-5=0$.

又 $|CD|=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$. 所以，最短弦长为 $2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$.

直线 l 被圆 C 截得的弦最短时 m 的值是 $-\frac{3}{4}$，最短长度是 $4\sqrt{5}$.

III 自我检测题

一、选择题.

1. 设圆心为 C_1 的方程为$(x-5)^2+(y-3)^2=9$，圆心为 C_2 的方程为 $x^2+y^2-4x+2y-9=0$，则圆心距等于（　　）

(A) 5　　(B) 25　　(C) 10　　(D) $2\sqrt{5}$

2. 空间直角坐标系中，点 $A(-3, 4, 0)$与点 $B(2, -1, 6)$的距离是（　　）

(A) $2\sqrt{43}$　　(B) $2\sqrt{21}$　　(C) 9　　(D) $\sqrt{86}$

3. 若直线 $ax+by=1$ 与单位圆 $x^2+y^2=1$ 有两个公共点，则点 $P(a, b)$ 与圆的位置关系是（　　）

(A) 在圆上　　(B) 在圆外　　(C) 在圆内　　(D) 以上皆有可能

4. 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，与直线 l：$4x+3y-12=0$ 的距离最小的点的坐标是（　　）

(A) $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$　　(B) $\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$　　(C) $\left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$　　(D) $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

5. 方程 $x^2+y^2+2ax-2ay=0$ $(a\neq 0)$ 表示的圆（　　）

(A) 关于 x 轴对称　　(B) 关于 y 轴对称

(C) 与直线 $x-y=0$ 对称　　(D) 关于直线 $x+y=0$ 对称

6. 若方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+a=0$ 表示圆，则 a 的值为（　　）

(A) $a=1$ 或 $a=-2$　　(B) $a=2$ 或 $a=-1$

(C) $a=-1$　　(D) $a=2$

二、填空题.

1. 直线 l_1：$2x-3y+4=0$，l_2：$3x-2y+1=0$ 的交点 P 与圆$(x-2)^2+(y-4)^2=5$ 的关系是____________.

2. 经过原点 O 作圆$(x-6)^2+y^2=4$ 的切线，切线长是____________.

3. 经过点 $P(2, -3)$ 作圆 $x^2+y^2=20$ 的弦 AB，且使得 P 平分 AB，则弦 AB 所在直线的方程是____________.

4. 点 P 在圆 C_1：$x^2+y^2-8x-4y+11=0$ 上，点 Q 在圆 C_2：$x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值是____________.

三、解答题.

1. 已知三条直线 l_1：$x-2y=0$，l_2：$y+1=0$，l_3：$2x+y-1=0$ 两两相交，先画出图形，再求过这三个交点的圆的方程.

2. 在△ABC 中，已知 $|BC|=2$，且$\frac{|AB|}{|AC|}=m$，求点 A 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

一、选择题.

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	C	A	D	C

1. 本题考查根据圆的一般方程找出圆心坐标以及已知两点坐标求距离.

解：由已知，圆 C_1、C_2的圆心坐标分别是（5，3），（2，−1）.

圆心距$=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$，选择（A）.

2. 本题考查空间直角坐标系中两点间距离公式.

解：$|AB|=\sqrt{(-3-2)^2+(4+1)^2+(0-6)^2}=\sqrt{86}$，选择（D）.

3. 本题考查直线与圆相交的条件，点在圆内的条件.

解：由题意，得$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$，即 $a^2+b^2<1$.

所以，点 P 在单位圆内，选择（C）.

4. 本题考查直线与圆的关系，数与形结合解题.

解：经过圆心 O 且与直线 l 垂直的直线的方程是 $3x-4y=0$.

解方程组$\begin{cases}3x-4y=0,\\x^2+y^2=4\end{cases}$得，$\begin{cases}x=\frac{8}{5},\\y=\frac{6}{5};\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{8}{5},\\y=-\frac{6}{5}.\end{cases}$

作为选择题，画出图形，可以判断点$\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)$是圆 $x^2+y^2=4$ 上到直线 l 距离最小的点，点$\left(-\frac{8}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$是圆 $x^2+y^2=4$ 上到直线 l 距离最大的点. 因此，选择（A）.

5. 本题考查圆的方程的简单应用.

解：把圆的方程化成标准形式，得

$$(x+a)^2+(y-a)^2=2a^2.$$

圆心坐标是（$-a$，a），由于圆心（$-a$，a）在直线 $x+y=0$ 上，所以，方程 $x^2+y^2+2ax-2ay=0$（$a\neq0$）表示的圆关于直线 $x+y=0$ 对称. 选择（D）.

6. 本题考查二元二次方程表示圆的条件，含参数方程的讨论.

解：若方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+a=0$ 表示圆，则必须

$$a^2=a+2.$$

解得　$a=2$，或 $a=-1$.

当 $a=2$ 时，原方程成为　$2x^2+2y^2+2x+1=0$.

对上式配方，得 $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=-\frac{1}{2}$，并不表示圆.

当 $a=-1$ 时，原方程成为　$x^2+y^2-2x-1=0$.

对上式配方，得$(x-1)^2+y^2=2$，它表示以（1，0）为圆心，$\sqrt{2}$为半径长的圆. 选择（C）.

二、填空题.

1. 本题注意前一章结合，求直线的交点坐标，点与圆的位置关系的判断.

解：解方程组$\begin{cases}2x-3y+4=0,\\3x-2y+1=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

把（1，2）代入圆 C 方程的左边，得 $(1-2)^2+(2-4)^2=5$.
所以，两直线的交点在圆 C 上.

2. 本题考查数形结合以及利用几何结论解题.

解：切线长是 $\sqrt{6^2-4}=4\sqrt{2}$.

3. 本题考查数形结合，与平面几何结合，复习前一章直线与方程.

解：把点 P 的坐标代入圆 $x^2+y^2=20$ 的左边，得 $2^2+(-3)^2=13<20$，所以，点 P 在圆 O 内. 经过点 P，被点 P 平分的圆的弦与 OP 垂直.

因为 $k_{OP}=-\dfrac{3}{2}$，所以 弦 AB 所在直线的斜率是 $\dfrac{2}{3}$，

弦 AB 所在的直线方程是 $y+3=\dfrac{2}{3}(x-2)$，即 $2x-3y-13=0$.

4. 本题考查化圆的一般方程为标准方程，圆与圆的位置关系的简单应用.

解：把圆 C_1、C_2 的方程都化成标准形式，得

$$(x-4)^2+(y-2)^2=9,\ (x+2)^2+(y+1)^2=4.$$

圆 C_1 的圆心坐标是（4，2），半径长是 3；圆 C_2 的圆心坐标是（-2，-1），半径长是 2.

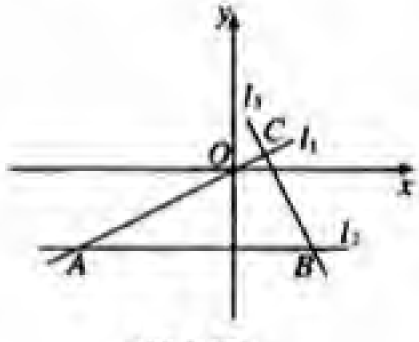
连心线长 $=\sqrt{(4+2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}$.

所以，$|PQ|$ 的最小值是 $3\sqrt{5}-5$.

三、解答题.

1. 本题考查前一章直线间的位置关系；考查画出图形，分析题意，发现隐含条件.

解：l_2 平行于 x 轴，l_1 与 l_3 互相垂直. 三交点 A，B，C 构成直角三角形，经过 A，B，C 三点的圆就是以 AB 为直径的圆.



（第 1 题）

解方程组

$$\begin{cases}x-2y=0,\\ y+1=0\end{cases} \text{得} \begin{cases}x=-2,\\ y=-1.\end{cases}$$

所以点 A 的坐标是（-2，-1）.

解方程组

$$\begin{cases}2x+y-1=0,\\ y+1=0\end{cases} \text{得} \begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$$

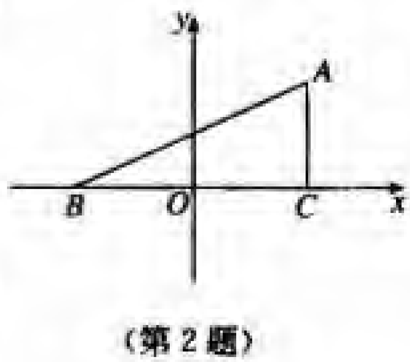
所以点 B 的坐标是（1，-1）.

线段 AB 的中点坐标是 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -1\right)$，又 $|AB|=\sqrt{(-2-1)^2+(-1+1)^2}=3$.

所求圆的标准方程是 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{9}{4}$.

2. 本题考查建立直角坐标系，求曲线方程的能力.

解：如图，以直线 BC 为 x 轴，线段 BC 的中点为原点，建立直角坐标系.



（第 2 题）

则有 $B(-1,\ 0)$，$C(1,\ 0)$，设 A 点的坐标为 $(x,\ y)$.

由 $\dfrac{|AB|}{|AC|}=m$，得 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=m\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，整理成

$$(m^2-1)x^2+(m^2-1)y^2-2(m^2+1)x+(m^2-1)=0. \qquad ①$$

当 $m^2=1$ 时，$m=1$，方程是 $x=0$，轨迹是 y 轴.

当 $m^2\neq 1$ 时，对①式配方，得

$$\left(x-\frac{m^2+1}{m^2-1}\right)^2+y^2=\frac{4m^2}{(m^2-1)^2}.$$

所以，点 A 的轨迹是以 $\left(\frac{m^2+1}{m^2-1},\ 0\right)$ 为圆心，$\frac{2m}{|m^2-1|}$ 为半径的圆（除去圆与 BC 的交点）.

Ⅳ 拓展资源

一、观察与猜想：足球射门问题

如图 1，甲、乙两球队进行足球比赛，AB 表示乙方球门，甲方队员 M 沿着与 AB 垂直的直线 CD 跑动. M 在何处射门，把球射进乙方球门的可能性最大？

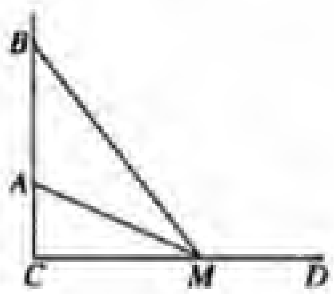


图 1

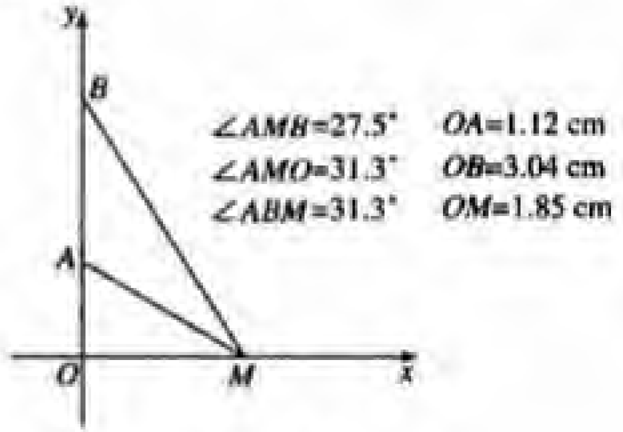


图 2

1. 实验与发现

当 M 所在位置使 $\angle AMB$ 最大时，把球射进乙方球门的可能性最大.

建立直角坐标系，使点 A，B 在 y 轴上，点 M 在 x 轴的正半轴上.

为找出这个位置，我们利用图形计算器或计算机测量出 $\angle AMB$. 改变点 M 的位置，使得 $\angle AMB$ 取得最大值. 在图 2 中，$\angle AMB$ 的最大值是 $27.5°$.

这样做，虽然能找到 $\angle AMB$ 的最大值，但是不能发现与已知条件——A、B 的位置有些什么联系.

再测量其他角的大小或者某些线段的长度. 比如测量 $\angle AMO$（AM 会不会是 $\angle AMB$ 的平分线?）、$\angle ABM$（会不会与 $\angle AMB$ 相等?），或者 $\angle OAM$. 再测量线段 OA、OB、OM 的长，它们会不会有些什么联系？等等.

改变点 M 的位置，可以发现当 $\angle AMB$ 最大时，一定有 $\angle AMO=\angle ABM$.

2. 探究原因

在 Rt$\triangle OMA$ 与 Rt$\triangle OBM$ 中，若 $\angle AMO=\angle OBM$，则 Rt$\triangle OMA\backsim$Rt$\triangle OBM$，

因此有 $\frac{OM}{OB}=\frac{OA}{OM}$，即 $OM^2=OA\cdot OB$.

改变点 M（或者点 A、B）位置再验证这个结论.

这说明，如果画出△ABM 的外接圆（圆心为 C），那么 OM 是圆心为 C 的圆的切线（M 是切点）、OB 是圆心为 C 的圆的割线.

画出△ABM 的外接圆（圆心为 C），如图 3，果真如此！

那么，为什么当△ABM 的外接圆与 x 轴相切时，$\angle AMB$ 最大呢？

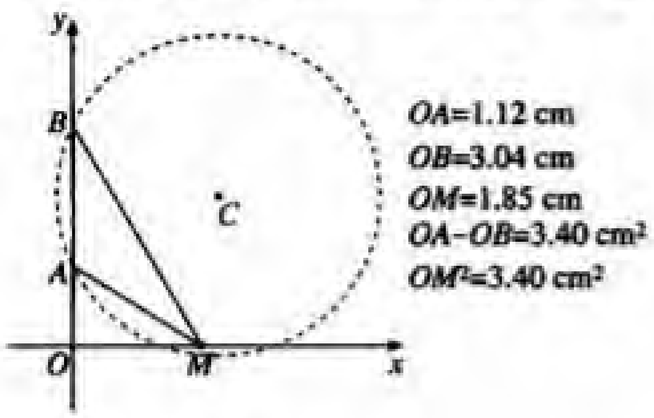


图 3

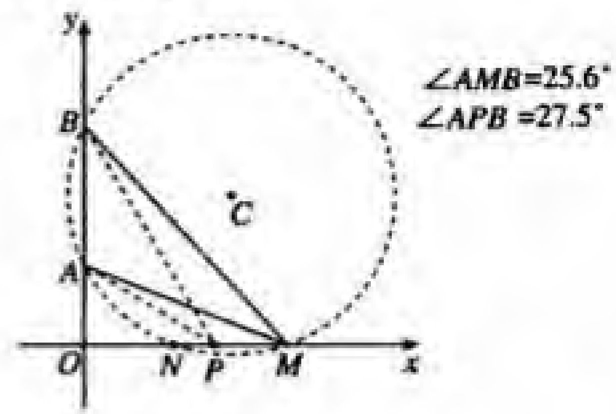


图 4

事实上，如图 4，若圆心为 C 的圆与 x 轴有两个交点 M，N，则位于线段 MN（不含端点 M，N）上的点 P 位于圆内，根据“同弧上的圆内角大于圆周角，同弧上的圆周角大于圆外角”，有 $\angle AMB<\angle APB$，因此，只有当圆心为 C 的圆与 x 轴相切时的切点 M 才是符合条件的点，即才能使 $\angle AMB$ 最大.

3. 进一步探究

如图 5，改变 AB 与 x 轴垂直这一条件，那么结论还成立吗？

结论仍然成立. 图 5 中，当 $OM^2=OA\cdot OB$ 时，有 $\angle AMB$ 最大.

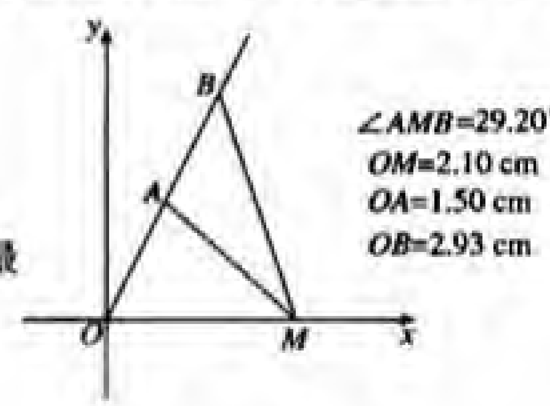


图 5

二、信息技术应用：有趣的反演变换

1. 什么是反演变换

如图 6，在平面上，给定了半径为 r 的⊙O，对于任意点 P，在射线 OP 上取一点 P'，使得 $OP\cdot OP'=r^2$，这种把点 P 变换为 P' 的变换叫做反演变换，点 P' 叫做点 P 的反演点，⊙O 叫做基圆.

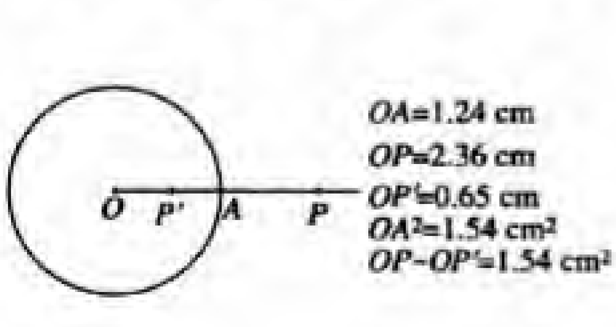


图 6

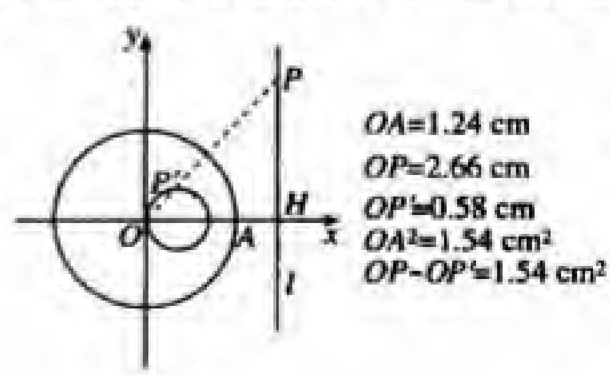


图 7

2. 直线的反演

如图 7，画垂直于 x 轴的直线 l，在直线 l 上任意画一点 P，作出与 P 关于圆 O 的反演点 P'，作出当点 P 在直线 l 上运动时点 P' 的轨迹. 发现点 P' 的轨迹是一个圆，但是缺少原点 O.

拖动点 P，改变它的位置，相应的点 P' 在小圆上运动.

为什么点 P' 的轨迹是缺一点的圆呢?

改变直线 l 的位置，使

（1）l 与圆 O 相切；

（2）l 与圆 O 相交.

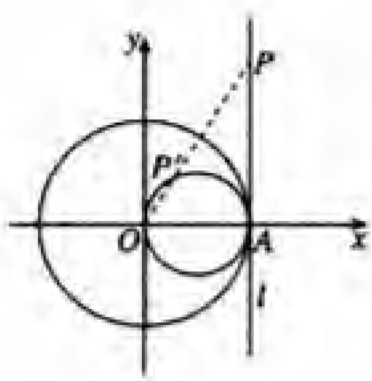


图 8

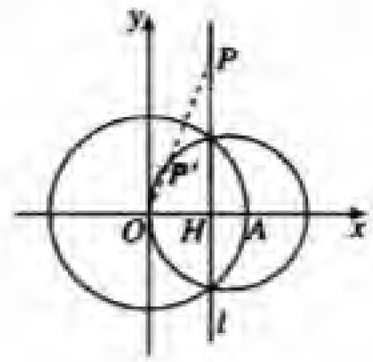


图 9

可以发现：

（1）l 与圆 O 相切时，如图 8，点 P' 的轨迹是一个与圆 O 相切的圆（缺点 O）；

（2）l 与圆 O 相交时，如图 9，点 P' 的轨迹是一个与圆 O 相交的圆（缺点 O）.

3. 探究原因

设圆 O 的半径为 r，直线 l 是 $x=a(a>0)$.

设 $P(x_0,\ y_0)$ 为直线 l 上任一点，其反演点为 $P'(x,\ y)$，则

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}=r^2. \qquad ①$$

又 $\dfrac{y_0}{y}=\dfrac{a}{x}$，即 $y_0=\dfrac{ay}{x}$. ②

把②代入①，注意到 $x_0=a$，并整理，得

$ax^2+ay^2-r^2x=0$，其中 $x\neq0$. ③

这就是点 P' 的轨迹方程.

由③式配方，得 $$\left(x-\frac{r^2}{2a}\right)^2+y^2=\left(\frac{r^2}{2a}\right)^2 (x\neq0).$$

（1）当 $0<a<r$ 时，直线 l 与圆 O 相交，此时反演图形与圆 O 相交；

（2）当 $a=r$ 时，直线 l 与圆 O 相切，此时反演图形与圆内切；

（3）当 $a>r$ 时，直线 l 与圆 O 相离，此时反演图形内含于圆 O.

4. 进一步的探究

（1）在以上的反演变换中，如果把被反演的对象改成圆，反演后的图形会是什么?

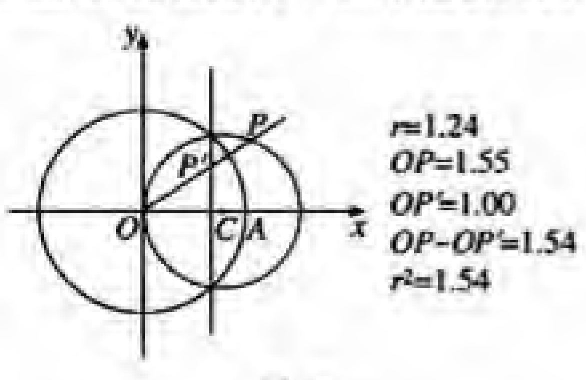


图 10

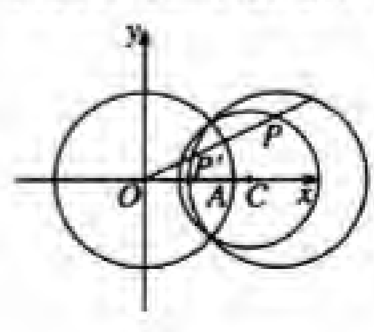


图 11

（2）如果把反演的对象改成二次函数的图象——抛物线呢? 改成等边三角形呢?

对于（1），由前面的讨论，不难知道，当被反演的圆经过基圆圆心时，反演后成为一条直线（图10）．当被反演的圆不经过基圆圆心时，反演后还是一个圆（图 11）．

如图 12，把抛物线 $y=x^2$ 反演后成为另一条曲线：设 $P(t,\ t^2)$，圆 O 的半径是 r，反演后的 P' 的坐标是（x，y），则有

$$\begin{cases} x=\dfrac{r^2}{t(1+t^2)}, \\ y=\dfrac{r^2}{1+t^2} \end{cases}$$（t 为参数）．消去 t，得 $r^2x^2-yx^2-y^3=0$.

如图 13，图 14，等边三角形反演的结果也是十分有趣的．

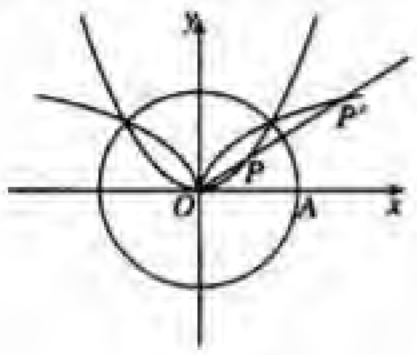


图 12

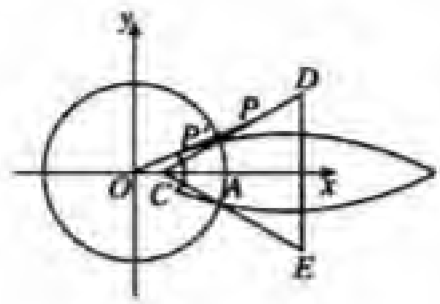


图 13

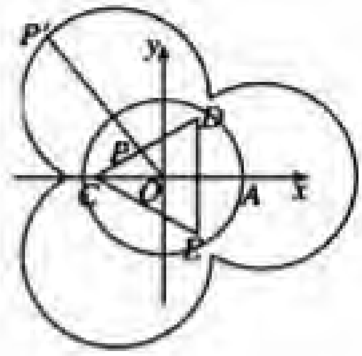


图 14